奥林匹克数学



钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

高一分册

OLYMPIC MATHS

金　牌　教　练　教　你　学

奥林匹克数学

高一分册 MATHS

钱展望　朱华伟　编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．高一分册/钱展望,朱华伟主编．—武汉:湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7－5351－3143－3

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①钱…②朱…　Ⅲ．数学课－高中－自学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011143 号

出版　发行:湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
网址:http://www.hbedup.com　邮编:430015　传真:027－83619605
邮购电话:027－83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本:850mm×1168mm　1/32　11.5 印张
版　次:2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字　数:283 千字　印数:1－8 000

ISBN 7－5351－3143－3/G·2549　定价:14.00 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛（1894年）。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月

奥林匹克数学（方法与研究）



钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国“五一”劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

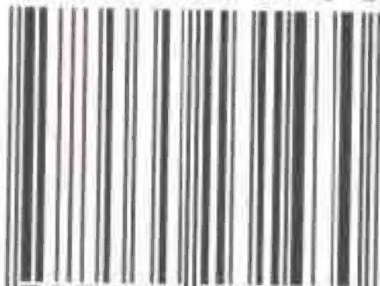
多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长，优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》，《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖。此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。



朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。



目 录

第一讲 集 合

知识点和方法述要

1. 集合

(1)一组对像的全体形成集合.集合是数学中最原始的概念之一.集合里各个对像叫做这个集合的元素,元素和集合之间的关系常用符号$\in$或$\notin$($\overline{\in}$)来表示.

(2)含有有限个元素的集合叫做有限集,含有无限多个元素的集合叫做无限集.

(3)列举法和描述法是通常使用的两种集合的表达方式.几个最常见的数集用专门字母表示,如自然数集记作 N,整数集记作 Z,有理数集记作 Q,实数集记作 R.

(4)集合中元素具有两大特性:确定性和互异性.列举法表示集合时,元素不计较顺序.

2. 子集

(1)若集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,即若任何 $x\in A$,有 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).由此可知任何一个集合都是它自身的一个子集.若 A 是 B 的子集,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,即若 $A\subseteq B$,又至少存在 $x_0\in B$,但 $x_0\notin A$,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2)空集是不含任何元素的集合,记作 $\emptyset$.空集 $\emptyset$ 是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

(3)对于两个集合 A 与 B,若 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则称两个集合相等,记作 $A=B$.

(4)集合 B 同它的真子集 A 之间关系的文氏图表示,如图 1-1 所示.文氏图形象直观,是解决集合与集合之间关系的重要工具.

(5)包含关系：$A\subseteq A$，$\varnothing\subseteq A$；$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；$A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

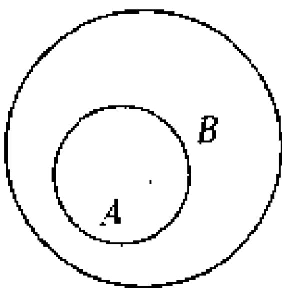


图 1－1

3. 交集

(1)由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$. 即 $A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$.

(2)文氏图 1－2 中的阴影部分，表示集合 A、B 的交集 $A\cap B$.

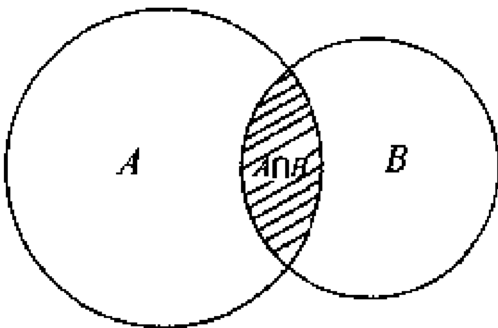


图 1－2

4. 并集

(1)由所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合叫做 A、B 的并集，记作 $A\cup B$，则 $A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$.

(2)文氏图 1－3 中，阴影部分表示 A、B 的并集 $A\cup B$.

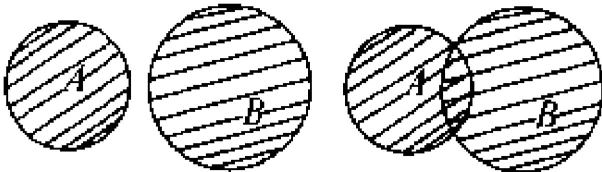


图 1－3

5. 由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A、B 的差集，记作 $A\setminus B$ 或 $A-B$.

6. 补集

(1)研究集合与集合的关系时，在某种情况下，这些集合都是某一给定集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，记作 I. 全集是相对于所研究的问题而言的一个相对概念，它包含我们所研究的各个集合中的全部元素，全集常因研究问题的不同而有所不同.

(2)设 I 为全集，$A\subseteq I$，$I-A$ 称为集合 A 关于集合 I 的补集. 记作 $\overline{A}$.

(3)文氏图 1－4 中，阴影部分表示 $\overline{A}$，整个长方形内部表示全集 I. A 是对于给定的全集 I 而言的，当研究补集 $\overline{A}$ 时，首先要明确

全集 I.

(4)补集的运算：$A\cup\overline{A}=I$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；$\overline{\overline{A}}=A$.

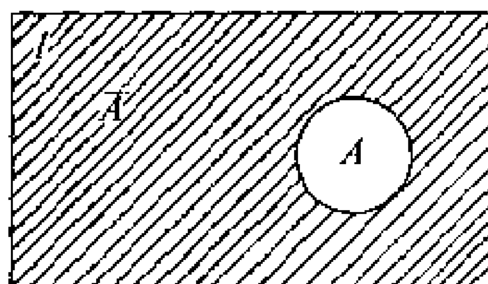


图 1－4

7. 交集、并集、补集有以下主要性质：

(1)$A\cup A=A, A\cap A=A$ （幂等律）.

(2)$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$ （交换律）.

(3)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ （结合律）.

(4)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ （分配律）.

(5)$A\cap(B\cup A)=A, A\cap(A\cup B)=A$ （吸收律）.

(6)$\overline{\overline{A}}=A$　其中 A 是全集 I 的子集（对合律）.

(7)$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$,

$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

其中 A、B 是全集 I 的子集.

例　题　精　讲

我们知道，所谓集合就是指某些对象的全体.集合最重要的特征是要能明确判断任何一个对象是不是该集合的元素.换句话说，对于一个对象 a 和集合 A，$a\in A$ 与 $a\overline{\in}A$ 二者必居其一.

例 1　已知 S 是由实数组成的数集，且满足：

(ⅰ)$1\overline{\in}S$；

(ⅱ)若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$.

请回答下列问题.

(1)证明：若 $2\in S$，则 S 中至少还含有其他两个元素；若 $a\in S$，

则 $1-\frac{1}{a}\in S$.

(2)试问集合 S 可否为单元素集?

解 (1)当 $a=2$ 时,$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-2}=-1$.根据(ⅱ)知,当 $2\in S$ 时,$-1\in S$.又当 $a=-1$ 时,$\frac{1}{1-a}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$.故当 $-1\in S$ 时,有 $\frac{1}{2}\in S$.以上说明,当 $2\in S$ 时,S 中至少还有元素 $-1,\frac{1}{2}$.

若 $a\in S$,根据(ⅱ)知,$\frac{1}{1-a}\in S$.由(ⅰ)知 $a\neq 0$,进而可知

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}=\frac{1-a}{-a}=1-\frac{1}{a}$$

属于 S.

(2)因 $1\overline{\in}S$,故当 $a\in S$ 时,$\frac{1}{1-a}$ 有意义.若 S 为单元素集,惟有

$$a=\frac{1}{1-a},$$

即

$$a^2-a+1=0. \quad ①$$

然而①无实数解,故 S 不可能为单元素集.

如果集合 A 是用描述性语言表达的,如

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\};$$

那么判断对象 a 是否为集合 A 的元素的基本方法,就是检验 a 是否具有性质 P.

例 2 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in \mathbf{Z}\}$.求证:

(1) $2k-1\in M\quad(k\in \mathbf{Z})$;

(2) $4k-2\overline{\in}M\quad(k\in \mathbf{Z})$;

(3)若 $p\in M,q\in M$.则 $pq\in M$.

证明 (1)因 $k,k-1\in \mathbf{Z}$,且

$$2k-1=k^2-(k-1)^2,$$

故 $2k-1\in M\quad(k\in \mathbf{Z})$.

(2)假设 $4k-2\in M(k\in\mathrm{Z})$. 则存在 $x,y\in\mathrm{Z}$,使

$$4k-2=x^2-y^2,$$

即
$$(x-y)(x+y)=2(2k-1).\qquad ①$$

由于 $x-y,x+y$ 具有相同的奇偶性,所以①式右边仅有两种可能:奇数或 4 的倍数. 而①式右边是 2 的倍数但不是 4 的倍数. 以上说明,①式不能成立,$4k-2\notin M$.

(3)设 $p=x_1^2-y_1^2,q=x_2^2-y_2^2,(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathrm{Z})$,则

$$\begin{aligned}pq&=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)\\&=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2\\&=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2,\end{aligned}$$

其中 $x_1x_2-y_1y_2\in\mathrm{Z},x_1x_2-x_2y_1\in\mathrm{Z}$.

所以 $pq\in M$,

两个集合 A,B 之间的包含关系是两集合间关系的一个重要方面. $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$)表示集合 A 是集合 B 的子集,意味着集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素. 特别地,若 B 中至少有一个元素不属于 A,那么 $A\subset B$(或 $B\supset A$),A 是 B 的真子集.

例 3 如果 $M=\{x\mid x=a^2+1,a\in\mathrm{N}\},P=\{y\mid y=b^2-4b+5,b\in\mathrm{N}\}$. 证明:$M\subset P$.

证明 任取 $x_0\in M$,有

$$x_0=a_0^2+1=(a_0+2)^2-4(a_0+2)+5\quad(a_0\in\mathrm{N}),$$

因 $a_0+2\in\mathrm{N}$,故 $x_0\in P,M\subseteq P$.

当 $b=2$ 时,$y=2^2-4\times2+5=1$,所以 $1\in P$;又 $a\in\mathrm{N}$ 时,$a^2+1>1$. 所以,$1\notin M$.

综上所述,$M\subset P$.

例 4 设集合

$$M=\{u\mid u=12m+8n+4l,m,n,l\in\mathrm{Z}\},$$
$$N=\{v\mid v=20p+16q+12r,p,q,r\in\mathrm{Z}\}.$$

求证：$M=N$.

证明 任取 $u_0\in M$，则存在 $m,n,l\in Z$，使

$$u_0=12m+8n+4l$$
$$=20n+16l+12(m-n-l).$$

显见，$u_0\in N$，从而 $M\subseteq N$.

任取 $v_0\in N$，存在 $p,q,r\in Z$，使

$$v_0=20p+16q+12r$$
$$=12r+8\cdot(2q)+4\cdot(5p)$$

知 $v_o\in M$，故 $N\subseteq M$.

综上所述，有 $M=N$.

两集合间最基本的运算是“并”运算、“交”运算、“差”运算.

例5 集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$. 若 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a,m.

解 依题设，$A=\{1,2\}$. 因 $A\cup B=A$，即 $B\subseteq A$，故集合 B 至多有元素1，2. 方程 $x^2-ax+(a-1)=0$ 的二根1，$a-1$，从而

(ⅰ) $a-1=2$，即 $a=3$，此时 $B=\{1,2\}$；

(ⅱ) $a-1=1$，即 $a=2$，此时 $B=\{1\}$.

所以，$a=2,3$.

$A\cap C=C$，即 $C\subseteq A$. 显然 C 含有元素1，2时，$m=3$，此时 $A=C$. 另一种情形是 $C=\varnothing$，此时，方程 $x^2-mx+2=0$ 无实根判别式 $\Delta=m^2-8<0$，即 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. 所以 m 的值为3或 $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

例6 已知 $S\subset N$，$92\in S$，S 中其他元素都是平方数. $A(S)$ 表示 S 中所有元素的算术平均数，如 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，则 $A(S)=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，若 $A(S)=85$，$A(S\setminus\{92\})=84$，求 S 中最大元素.

解 设集合 S 的元素数为 $n+1$，则

$$n\cdot 84+92=(n+1)\cdot 85.$$

解得 $n=7$.

设 $S \setminus \{92\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_7\}$, $0<a_1<a_2<\cdots<a_6<a_7$,依题意

$$a_1+a_2+\cdots+a_6+a_7=84\times 7=588,$$

且
$$a_1+a_2+\cdots+a_6 \geqslant 1^2+2^2+\cdots+6^2$$

$$=\frac{1}{6}\times 6\times 7\times 13=91,$$

$$a_7 \leqslant 588-91=497,$$

进而知完全平方数 $a_7 \leqslant 22^2$.

注意到

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+7^2+22^2=588,$$

故 $a_7=22^2=484$,即为所求.

例 7 设 a,b 是两个实数,集合 A,B,C 分别是

$$A=\{(x,y) \mid x=n, y=an+b, n\in \mathbf{Z}\},$$

$$B=\{(x,y) \mid x=m, y=3m^2+15, m\in \mathbf{Z}\},$$

$$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 144\}.$$

是否存在 a,b 使得

(i) $A\cap B\neq\varnothing$;

(ii) $(a,b)\in C$ 同时成立.

分析 A,B 可改写为:

$$A=\{(x,y) \mid y=ax+b, x\in \mathbf{Z}\},$$

$$B=\{(x,y) \mid y=3x^2+15, x\in \mathbf{Z}\},$$

$A\cap B\neq\varnothing$ 的意思是存在实数 a,b 和整数 x 使得 $y=ax+b=3x^2+15$, $x\in \mathbf{Z}$ 成立,$(a,b)\in C$ 表示 $a^2+b^2\leqslant 144$. 这样,问题转化为:是否存在实数 a,b,使得

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 144, & ① \\ ax+b=3x^2+15, & ② \\ x\in \mathbf{Z}. & ③ \end{cases}$$

由②得

$$3x^2-ax+15-b=0.$$

因为 $x\in \mathbf{Z}$,所以其判别式

$$\Delta=(-a)^2-12(15-b)\geqslant 0,$$

即是 $a^2\geqslant 180-12b$.因此

$$a^2+b^2\geqslant(180-12b)+b^2=(b-6)^2+144\geqslant 144.$$

再考虑到①,有

$$144\leqslant a^2+b^2\leqslant 144,$$

所以 $a^2+b^2=144$.此时 $b=6,a=\pm 6\sqrt{3},\Delta=(-a)^2-12(15-b)=0$,有 $x=\frac{a}{b}=\pm\sqrt{3}$,这与③矛盾.

从而表明,不存在实数 a,b,使得(ⅰ)、(ⅱ)同时成立.

例 8 已知集合 $A=\{(x,y)\mid ax+y=1\},B=\{(x,y)\mid x+ay=1\},C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$,问

(1)当 a 取何值时,$(A\cup B)\cap C$ 为含有两个元素的集合?

(2)当 a 取何值时,$(A\cup B)\cap C$ 为含有三个元素的集合?

分析 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$. $A\cap C$ 与 $B\cap C$ 分别为方程组

$$\begin{cases}ax+y=1,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}\quad(\mathrm{I})\qquad \begin{cases}x+ay=1,\\ x^2+y^2=1\end{cases}\quad(\mathrm{II})$$

的解集.由(Ⅰ)解得 $(x,y)=(0,1),\left(\frac{2a}{1+a^2},\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)$;由(Ⅱ)解得 $(x,y)=(1,0),\left(\frac{1-a^2}{1+a^2},\frac{2a}{1+a^2}\right)$.

(1)使 $(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素的情况只有两种可能:

$$\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=0,\\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=1;\end{cases}\qquad(\mathrm{III})$$

及

$$\begin{cases}\frac{2a}{1+a^2}=1,\\ \frac{1-a^2}{1+a^2}=0;\end{cases}\qquad(\mathrm{IV})$$

由(Ⅳ)得 $a=0$;由(Ⅴ)得 $a=1$.故当 $a=0$ 或 1 时,$(A\cup B)\cap C$ 恰有两个元素.

(2)$(A\cup B)\cap C$ 恰有三个元素,当且仅当

$$\frac{2a}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2}$$

解得 $a=-1\pm\sqrt{2}$.

例 9 设 S 是有理数集的非空子集,满足

(ⅰ)$0\notin S$;

(ⅱ)若 $x,y\in S$,则$\frac{x}{y}\in S$;

(ⅲ)存在非零有理数 $q\notin S$,当 $x\notin S$ 时,$\frac{x}{q}\in S(x\neq 0)$.

求证:对任何 $u\in S$,存在 $u_1,u_2,u_3\in S$,使得 $u_2-u_1=5u,u_3-u_2=5u$.

证明 注意到 S 是有理数集的非空子集且 $0\notin S$,故可在(ⅱ)中令 $y=x$,得 $1\in S$.若 $y\in S$,由(ⅱ)知$\frac{1}{y}\in S$.进而若 $x,y\in S$,由(ⅱ)可知 $xy\in S$.

若 $x\notin S,y\notin S(x,y\neq 0)$,则 $xy\in S$.否则 $xy\notin S$,由ⅲ知,存在非零有理数 $q\notin S$,使得$\frac{x}{q}\in S,\frac{y}{q}\in S,\frac{xy}{q}\in S$.又由前述结论知$\frac{xy}{q^2}\in S$,根据(ⅱ)可知 $q\in S$,矛盾.

综上所述,对 $x\in Q(x\neq 0)$,有 $x^2\in S$,于是$\left(\frac{31}{12}\right)^2\in S,\left(\frac{41}{12}\right)^2\in S,\left(\frac{49}{12}\right)^2\in S$.令 $u_1=\left(\frac{31}{12}\right)^2u,u_2=\left(\frac{41}{12}\right)^2u,u_3=\left(\frac{49}{12}\right)^2u$.容易验证 $u_2-u_1=u_3-u_2=5u$.

练　习　一

一、选择题

1. 数集 $X=\{2n+1(n\in Z)\}$ 与数集 $Y=\{4k\pm1(k\in Z)\}$ 之间的关系是　　　　　　　　　　(　　).

(A) $X\subset Y$　　(B) $X\supset Y$

(C) $X=Y$　　(D) $X\neq Y$

2. M,N 是彼此不相等的两个非空集合，$M\cup N=P$ 且 $P\subseteq N$，则 $M\cap N=$　　　　　　　　　　(　　).

(A) M　(B) N　(C) P　(D) $\varnothing$

3. 已知集合 $M=\{x\mid y^2=x+1\}$，$T=\{x\mid y^2=-2(x-5)\}$，那么 $M\cap T=$　　　　　　　　　　(　　).

(A) $\{(x,y)\mid x=3,y=\pm2\}$

(B) $\{x\mid -1<x<5$

(C) $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant5$

(D) $\{x\mid x\leqslant5\}$

4. 已知集合 $M=\{$平行四边形$\}$，$P=\{$菱形$\}$，$Q=\{$矩形$\}$，$T=\{$正方形$\}$. 则下列等式中能够成立的是　　　　　　　　　　(　　).

(A) $(M\cap P)\cup M=M$　　(B) $Q\cup P=M$

(C) $M\cup T=P\cup Q$　　(D) $(P\cap Q)\cup T=M$

5. 设 $M=\{y\mid y=x^2-1,x\in R\}$，$N=\{y\mid y=x-1,x\in R\}$，则 $M\cap N=$　　　　　　　　　　(　　).

(A) $\{(0,-1),(1,0)\}$　　(B) $\{-1,0\}$

(C) $\{0,1\}$　　(D) $[-1,+\infty)$

二、填空题

6. 设全集 $I=\{x\mid x<10,x\in N\}$，$A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，$A\cap\overline{B}=\{3,5,7\}$，则集合 A 为______.

7. 已知集合 $A=\{x,xy,xy-1\}$，其中 $x\in Z$，$y\in Z$ 且 $y\neq0$. 若

$0\in A$，A 中元素和是____.

8. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2-2x+1=0,a\in R,x\in R\}$ 只有一个元素，则 $a=$______.

9. 已知集合 $P=\{x\mid x^2+x-6=0\}$，$M=\{x\mid mx-1=0\}$，且 $M\subset P$，m 取值所成的集合为______.

10. 已知 $A=\{2,-1,x^2-x+1\}$，$B=\{2y,-4,x+4\}$，$C=\{-1,7\}$，且 $A\cap B=C$，$x=$______.

三、解答题

11. 已知集合 $A=\{x\mid 10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，求实数 m 的范围.

12. 已知 $A=\{(x,y)\mid \frac{y-4}{x-2}=3\}$，$B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，求 $\overline{A}\cap B$.

13. 设 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$. 且 $A\neq\varnothing$，$B=\{y\mid y=2x+3,x\in A\}$，$C=\{z\mid z=x^2,x\in A\}$，且 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

14. 判断下面命题是否正确：

设 A,B 是坐标平面上两个点集，$C_r=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant r^2\}$. 若对任何 $r\geqslant 0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$.

15. 设 $a_i,b_i,c_i(i=1,2,3)$ 为九个正数，令

$$S_1=a_1b_2c_3,S_2=a_2b_3c_1,S_3=a_3b_1c_2,$$

$$T_1=a_1b_3c_2,T_2=a_2b_1c_3,T_3=a_3b_2c_1.$$

设由 S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3 组成的集合至多有两个元素，证明：

$$S_1+S_2+S_3=T_1+T_2+T_3.$$

16. 设 A 和 B 是两个集合，设集合 X 满足 $A\cap X=B\cap X=A\cap B$，$A\cup B\cup X=A\cup B$，求集合 X.

第二讲　两个计数的基本原理

知识点和方法述要

1. 在计数过程中，乘法原理和加法原理是两个所依据的最基本的原理.

(1) 乘法原理　做一件事，完成它需要 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事的所有方法有

$$N = m_1 m_2 \cdots m_n$$

种.

运用乘法原理，关键在于把完成一件事的全过程作多重选取的过程处理，分成若干阶段，每一阶段都是从相应的一个集合中挑选一个元素，考虑其可能有的不同方式数.

(2) 加法原理　做一件事，完成它可以有 n 类方法，在第一类方法中有 m_1 种不同方法，在第二类方法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类方法中有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有方法

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种.

如果把一个集合分成若干个子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，使得

(ⅰ) $A_i \cap A_j = \emptyset (1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$，

(ⅱ) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A (i = 1, 2, \cdots, n)$，

那么这些子集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 叫做 A 的一个分划，也就是说，它们的并集为 A，两两交集为空集，满足上述两条性质的子集 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，加法原理表现为

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|,$$

这里$|A_i|$表示集合 A_i 所包含的元素个数.

上述用集合的观点表示的加法原理,更突出地表明:运用加法原理计数,同级分类必须依据统一的分类标准,不能重复或遗漏.

2. 计数中,穷举法(枚举法)是一种最原始最基本的方法.所谓穷举法,即通过对所有情形的一一列举而导致结论的方法.若所计数目不大时,使用这种方法常可见效.

3. 容斥原理　对于任一集合 X,记$|X|$为集合 X 的元素数,则

(ⅰ) 如图 2-1 所示,$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|$.

(ⅱ) 如图 2-2 所示,$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-(|A_1\cap A_2|+|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_3|)+|A_1\cap A_2\cap A_3|$.

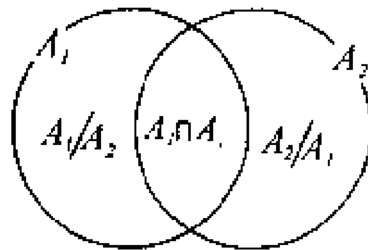


图 2-1

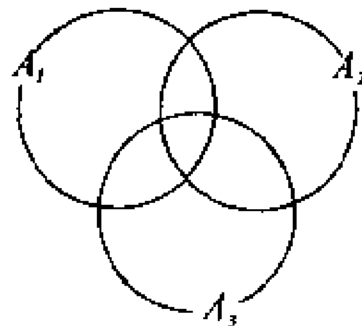


图 2-2

(ⅲ) 一般地,当 $m\geqslant 2$,

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|=\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m+1}|A_1\cap A_2\cdots\cap A_m|.$$

容斥原理是加法原理的推广.如果诸项 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两不交,容斥原理即为加法原理.它与加法原理的区别在于后者要求将被计数的集合 A 分为子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 时须保证两两不交,即进行分划,而前者可不受此限制.

4. 规定　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

(ⅳ) 根据加法原理,对于全集 I,当 $A\subseteq I$ 时,

$$|I|=|A|+|\overline{A}|,$$

即 $$|\overline{A}|=|I|-|A|.$$
由此马上可以得到，当 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m\subseteq I$ 时

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m}|=|I|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|$$
$$-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|$$

上述等式我们称为逐步淘汰原理.

例 题 精 讲

例 1 如果直角三角形的边长可表示为 m^2+n^2，m^2-n^2，$2mn$ $(m>n\geqslant 1, m, n\in N)$，边长均小于 100，问这样的直角三角形有多少种不同情形？

分析 依题设，知

$$m^2+n^2<100,$$

所以 $m\leqslant 9$. 注意到 $m>n$，穷举如下：

当 $m=2$ 时，$n=1$；

当 $m=3$ 时，$n=1,2$；

当 $m=4$ 时，$n=1,2,3$；

当 $m=5$ 时，$n=1,2,3,4$；

当 $m=6$ 时，$n=1,2,3,4,5$；

当 $m=7$ 时，$n=1,2,3,4,5,6$；

当 $m=8$ 时，$n=1,2,3,4,5$；

当 $m=9$ 时，$n=1,2,3,4$.

直角三角形具体组成情况如下表所示.

共有不同的直角三角形

$$1+2+3+4+5+6+5+4=30(\text{种}).$$

m	n	m^2+n^2	m^2-n^2	$2mn$
2	1	5	3	4

3	1	10	8	6
	2	13	5	12
4	1	17	15	8
	2	20	12	16
	3	25	7	24
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	1	82	80	18
	2	85	77	36
	3	90	72	54
	4	97	65	72

例 2 已知 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,求集合的子集数.

分析 就单元素集$\{a\}$而言,它的子集有 $\varnothing$,$\{a\}$两个;若集合为$\{a_1,a_2\}$,那么它的子集有 $\varnothing$,$\{a_1\}$,$\{a_2\}$,$\{a_1,a_2\}$等四个;若集合为$\{a_1,a_2,a_3\}$,那么它的子集有 $\varnothing$,$\{a_1\}$,$\{a_2\}$,$\{a_3\}$,$\{a_1,a_2\}$,$\{a_2,a_3\}$,$\{a_1,a_3\}$,$\{a_1,a_2,a_3\}$等八个.由于每个子集的构成取决于元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是属于还是不属于该集合,根据乘法原理,可知集合 A 有子集 2^n 个,其中包括 $\varnothing$ 及自身.

例 3 有壹元人民币 3 张,伍元人民币 2 张,拾元人民币 4 张,伍拾元人民币 1 张,从中至少取一张,多不限,共可取得多少种不同币值?

分析 注意到取 2 张伍元的人民币与 1 张拾元人民币币值相同,不能算作两种不同取法,为避免重复,将 4 张拾元人民币和 2 张伍元人民币的"换成"10 张伍元人民币,二者所起的作用是一样的.同样一张伍拾元人民币、2 张伍元人民币、4 张拾元人民币可"换成"20 张伍元人民币,于是问题等价于:

有一元人民币 3 张,伍元人民币 20 张,至少取一张,多不限,可取得多少种不同币值?

把取币的过程看作二重选取过程,从 3 张壹元人民币中取有 0,1,2,3 张 4 种不同情形,从 20 张伍元人民币中取有 0,1,2,…20 张 21 种不同情形,根据乘法原理,有

$$4 \times 21 = 84$$

种不同币值.但必须除去壹元、伍元均没有取的情形,故可取得 83 种不同币值.

在计数过程中常常将乘法原理和加法原理结合使用.

例 4 如图 2-3 所示的棋盘格形的街道上,若阴影部分内暂时不能通过,问从 A 到 B 的最短路线有多少种?

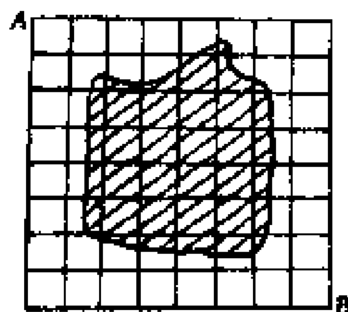


图 2-3

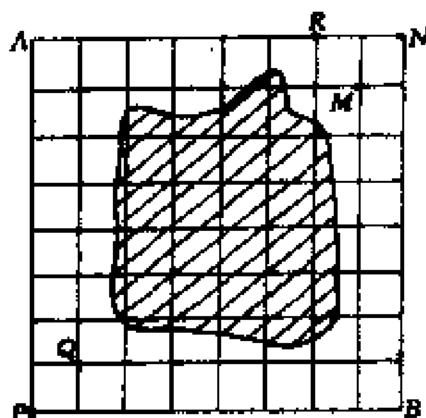


图 2-4

分析 如图 2-4,可将从 A 到 B(不经过阴影部分)最短路线分为三类不同情形.

(i) 从 A 经过 P 到 B. 路线是惟一的.

(ii) 从 A 经过 Q 到 B. 由于从 A 到 Q 有 8 种不同路线,而从 Q 到 B 又有 8 种不同路线,根据乘法原理,从 A 经过 Q 到 B 的最短路线有

$$8 \times 8 = 64(\text{种}).$$

(iii) 从 A 经过 R 到 B. 此类路线又可分为两种情形:

(1) 从 A 经 R 再经 N 到 B,路线是惟一的;

(2) 从 A 经 R 再经 M 到 B,其中从 A 到 R 路线是惟一的,从 R 到 M 有 2 种不同路线,而从 M 到 B 又有 8 种不同路线,根据乘法原理,此类路线有 $1 \times 2 \times 8 = 16$(种).

于是从 A 经 R 再经 M 或 N 到 B 的路线有 17 种.

根据加法原理,所求路线共有

$$1 + 64 + 17 = 82(\text{种}).$$

例 5 有多少个能被 3 整除而又含数字 6 的五位数?

分析 五位数中含有数字 6 的情况比较复杂,可以含有一个 6,二个 6……乃至五个 6.这些 6 还可以出现在各个不同的数位上,故正面分类繁难.不妨从反面去想一想,情形就简单多了,只有不含有数字 6 一类,只须从被 3 整除的所有五位数中减去其中不含数字 6 的数即可求解.

从 10000 到 99999 这 90000 个五位数中,能被 3 整除的五位数有 30000 个.

再看上述 30000 个数中不含数字 6 的数.首先最高位数字有 1,2,3,4,5,7,8,9 等 8 种不同情形,而千位、百位、十位上不能为 6,均有 9 种不同情形.个位上除了不能为 6 外,还应保证整个五位数被 3 整除,换句话说,当前四位数字之和为 3 除余数为 2 时,个位数应为 1,4,7 中一个,当前四位数字之和被 3 除余数为 1 时,个位数字可为 2,5,8 之一,而当余数为 0 时,个位数可为 0,3,9 中一个.总而言之,无论前四位数字如何,个位数字都有 3 种可能情形.根据乘法原理,能被 3 整除且不含数字 6 的五位数有

$$8 \times 9 \times 9 \times 9 \times 3 = 17496(\text{个}).$$

因此,所求五位数有

$$30000 - 17496 = 12504(\text{个}).$$

避繁就简,通过从总数中淘汰掉易于计数的不符合要求的情形是计数中常采用的手段.

例 6 某工厂生产一批玩具,要预先制作一批圆环形底板.这些底板上均匀分布有 12 个半球形凹洞.其中 3 个为红色,9 个是白色,如图 2－5 所示.若两个洞可以球心对球心,红色对红色,白色对白色叠放在一起,我们说它属于同一规格.问:该工厂生产的这类玩具底板一共可以有多少种不同的规格?

分析 如图 2－5,先假定 12 个洞都为白色,再将其中三个涂成

红色,并通过旋转将 A 处的球保证为红色.由 A 开始顺时针方向标数,A 处的数标 0,其他的洞顺序标为 1,2,…,10,11.三红洞所在位置标的数记为 $\{0,i,j\}$,$0<i<j$.显然,i 可以取值 2,3,4,…,11.当 $j=2$ 时,i 只能取值 1,只有一种取法;当 $j=3$ 时,i 只能取值 1,2,共 2 种;当 $j=4$ 时,i 可以取值 1,2,3,共 3 种……当 $j=11$ 时,i 可以取值 1,2,…,10,共 10 种取法.因此,为保证位于 A 处的洞是红色的,共有

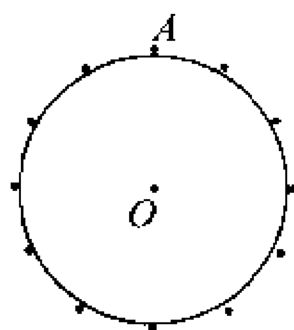


图 2-5

$$1+2+\cdots+10=55$$

种涂法.

由于三红洞没有特殊性,经旋转后,另二红洞也可以位于 A 处.而属于同一类的涂法,都可以由同一类中选定的一种涂法经旋转而得到.

首先,若经旋转后,不产生新的涂法,则三红洞的位置必是(0,4,8).其次,若经旋转后将第二个红洞转到 A 处,产生新的涂法,那么将第三个红洞转到 A 时必产生第三种涂法.否则就是(0,4,8).由于只有三个红洞,对于这一选定的涂法,经旋转只能产生三种涂法.因此 55 种涂法除(0,4,8)外,还有 54 种,其中任一种都与某二种属于同一类.所以有不同规格的玩具底板

$$\frac{54}{3}+1=19(\text{种}).$$

例 7 某州颁布由 6 个数字组成的车牌号码(由 0~9 的数字组成),该州规定任何两个牌号至少有两个数字不同(因此证号 027592 和 020592 不能都被使用).试决定车牌证号最多有多少个?给出证明.

解 由 5 个数字组成的不同号码有 10^5 种.对每个 5 位数号码 $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$,再在后面添加第 6 个数字 x_6,其规则是:x_6 为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的和的个位数字.

对于任何这样构造出来的两个不同数:$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$,

$\overline{b_1b_2b_3b_4b_5b_6}$. 至少有一个数位 $1\leqslant j\leqslant 5$，使得 $a_j\neq b_j$. 若另有一个数位上两数字不同，则保证了这两个数至少有两个数字不同. 否则仅有一个数位上数字不同，$a_6\neq b_6$，同样至少有两个数字不同. 于是任何两个按上面作法构造的六位数至少有两个数字不同且共有 10^5 个.

若有大于 10^5 个牌号，则至少有两个牌号的前 5 位相同. 因而它们至多一个数字不同. 故车牌证号至多 10^5 个.

例 8 在一个圆上依次排列着 $a_1, a_2, \cdots, a_{15}$ 共 15 个不同的点，如图 2－6 所示. 从中取出 k 个点作出 k－组合. 如果在这 k 个点的任何两点所夹的短弧内部都不是恰好包含两个 a_i（这就是说，如果 a_1 属于 k－组合，则 a_4 和 a_{13} 都不属于它），则称它为"合格 k－组合". 对于 $k=1,2,\cdots,15$，以 $f(k)$ 表示所有的合格 k－组合的个数，试求 $\sum\limits_{k=1}^{15}f(k)$.

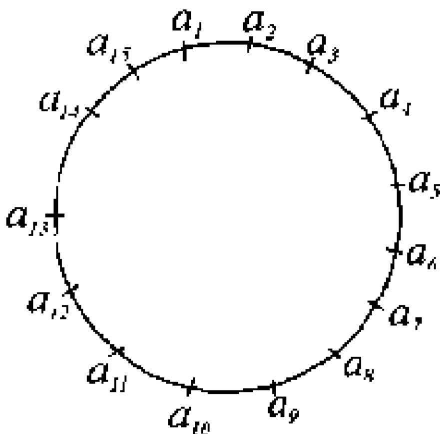


图 2－6

分析 1－组合显然有 15 个. 再看 2－组合，直接从 $a_1, a_2, \cdots, a_{15}$ 出发去完成 2－组合，不是一件容易事，能否另觅蹊径？注意到题设要求，从反面考察. 如图 2－7，先从 a_1 出发，将恰好包含两个 a_i 的点取出来，放在一个圆周上，可以看到任何一个 k－组合都不可能包含该圆周上相邻两点，这样一来，我们还可以如图 2－8 所示，再分别作两个圆周，上面各标上数组 $\{a_2, a_5, a_8, a_{11}, a_{14}\}$，$\{a_3, a_6, a_9, a_{12}, a_{15}\}$，连同图 2－7 中所标数组 $\{a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}\}$，于是任何一个 k－组合是合格当且仅当：它不包含任何一个图 2－8 或图 2－9 中所示的圆周上的相邻两点. 由于这三个圆上各自能取出的两两不相邻的点

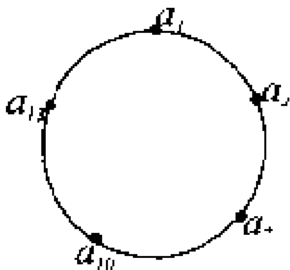


图 2－7

数为 2，总数不超过 6，这说明对于 $k \geqslant 7$，根本不存在合格的 k - 组合，即对于 $k \geqslant 7$，恒有 $f(k)=0$.

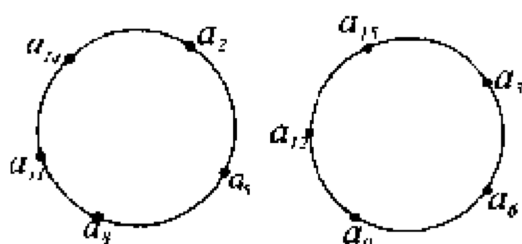


图 2 - 8

一个合格的 6 - 组合，必须包含每个圆周上不相邻的两点，而每个圆周上不相邻的两点所成"点对"皆为 5 个，根据乘法原理可得

$$f(6)=5^3=125.$$

每个合格的 5 - 组合，则是在其中一个圆周上取一点，在其余两圆周上各取一个不相邻点所成"点对". 根据乘法原理，3 个圆中取 1 个且在该圆的 5 个点中取 1 点有 15 种取法，而在其余的两圆周不相邻点所成"点对"皆为 5 个. 因此又由乘法原理可得

$$f(5)=15\times 5^2=375.$$

所有合格的 4 - 组合可分为两类：一类是取两个圆，每个圆周上取一对不相邻点，这有

$$3\times 5^2=75(\text{种})$$

不同取法；另一类是其中一个圆周上取一对不相邻点，其余两圆周上各取一点，不同取法有

$$3\times 5\times 5^2=375.$$

根据加法原理，可得

$$f(4)=75+375=450.$$

类似有

$$f(3)=5^3+3\times 2\times 5^2=275,$$

$$f(2)=3\times 5^2+3\times 5=90.$$

综上所述，知

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} f(k)&=\sum_{k=1}^{6} f(k)\\&=125+375+450+275+90+15\\&=1330.\end{aligned}$$

注 还可采用以下解法，图2-7，图2-8中，每个圆周上至多出现2-组合，根据乘法原理，有

$$(5+5+1)(5+5+1)(5+5+1)-1=1330$$

种符合要求的 k-组合，这是因为每个圆周上有5个2-组合，5个1-组合，每种符合要求的 k-组合都由各个圆周上的2-组合，1-组合构成.

例9 某歌舞团有若干演员，他们或能歌，或善舞，或精弹奏，其中能歌的有24人，善舞的有26人，精弹奏的有22人；能歌善舞的有8人，能歌精弹奏的有10人，善舞精弹奏的有11人；又知道三项只会其一的人数与会两项或两项以上的人数相等．求

(1) 这个歌舞团的演员人数；

(2) 三项全能的演员人数.

解 设 $I=\{$某歌舞团演员$\}$，$A=\{$能歌演员$\}$，$B=\{$善舞演员$\}$，$C=\{$精弹奏演员$\}$，依题意有 $I=A\cup B\cup C$.

$$|I|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|C\cap A|+|A\cap B\cap C|,$$

$$\frac{1}{2}|I|=|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-2|A\cap B\cap C|,$$

即
$$\begin{cases} |I|=24+26+22-8-10-11+|A\cap B\cap C|, & ① \\ \frac{1}{2}|I|=8+10+11-2|A\cap B\cap C|, & ② \end{cases}$$

设 $|I|=x$，$|A\cap B\cap C|=y$，代入①，②可得

$$\begin{cases} x-y=43, \\ x+4y=58. \end{cases}$$

解得 $x=46$，$y=3$. 所以，这个歌舞团演员人数为46，其中三项全能的演员人数为3.

练 习 二

一、选择题

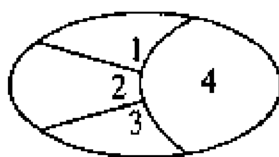
1. 从甲地到乙地，每天有直达汽车 4 班，从甲地到丙地，每天有 5 个班车，从丙地到乙地，每天有 3 个班车，则从甲地到乙地，不同的乘车方法种数是 (　　).

(A)12　　(B)19　　(C)32　　(D)60

2. 某城市的电话号码，由六位数改为七位数(首位数字不为零)，则该城市可增加的电话门数是 (　　).

(A)81×10^5　　(B)9×10^6　　(C)8×9^6　　(D)$\frac{91}{2}\times10^5$

3. 用五种不同的颜色给图中四个区域涂色，如果每一区域涂一种颜色，相邻区域不能同色，那么不同涂色方法的种数是 (　　).



(第 3 题)

(A)120　　(B)135　　(C)180　　(D)240

4. 分正方形的每边 4 等分，取分点为顶点可以作出三角形个数是 (　　).

(A)104　　(B)108　　(C)214　　(D)216

5. 同室四人各写一张贺卡，先集中起来然后每人从中拿一张别人写的贺卡，则四张贺卡不同的分配种数为 (　　).

(A)6　　(B)9　　(C)11　　(D)23

二、填空题

6. 将 3 封信投入 4 个不同的信筒，有______种不同的投法；4 名学生从 3 个不同的楼梯下楼，有______种不同的下法.

7. 三边均为整数，且最长边为 11 的三角形有______个.

8. 在立方体的展开图里，不同形状(即不能重合)的图有______个.

9. 有 $2n$ 个人参加收发电报培训，每两人结为一对互发互收，不

同的结对方式有______种.

10. 比 10000 小的正整数中含有数字 1 的数有______个.

11. 一个国王的 25 位骑士围坐在他们的圆桌旁,他们中间的三位被派去杀一条恶龙,则被挑到的三位骑士中至少有两位是邻座的挑选方法有______种.

三、解答题

12. 用数字 1,2 写十位数,至少有连续 5 位都是 1,这样的十位数有多少个?

13. (1) 长度为 k 的由 0,1 组成的串的个数是多少?(要求每串至少有一个 1)

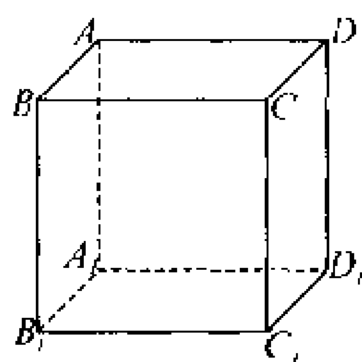
(2)有多少种方式可以同时产生 n 个这样的串,其中串可以相同也可以不同,但每串至少有一个 1.

(3) S 是一个具有 n 个元素的集合.选取 S 的 k 个子集(每个子集中的元素不限),把这些子集顺序地记作 $B_1,B_2,\cdots,B_k$,对 S 的每个元素建立一个 0,1 串,如果该元素属于 B_j,则对应串中第 j 项为 1,否则为 0(这相当于每个子集 $B_1,B_2,\cdots,B_k$ 都具有一个长度为 n 的 0,1 串).如果我们要求 S 的每一个元素至少属于一个子集,则每串中至少有一个 1,那么有多少种方法可选取这样 k 个有序子集,而这些子集的并集等于 S.

14. 令 S 为一个有 6 个元素的集合,问有多少种不同的分法可以把 S 分成两个不一定不同的子集,使得这两个子集的并集恰好是 S? 选取的顺序是无关的(即不导致两种不同的选法,如$\{a,c\},\{b,c,d,e,f\}$与$\{b,c,d,e,f\},\{a,c\}$算一种选法.

15. 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上,有一动点 P 由顶点 A 出发按下列规则向 C_1 移动:

(1) 点 P 只能沿着正方形木块的棱线或表面对角线移动;



(第 15 题)

(2) 点 P 每变化一个位置,都使动线段 PC_1 缩短. 动点 P 共有多少种不同的运行路线?

第三讲　整数集　自然数集

知识点和方法述要

1. 整数集关于加、减、乘运算具有封闭性，即整数的和、差、积仍为整数(两个整数的商不一定是整数).

2. 整数集具有离散性，两个连续整数之间不再有其他整数. 任意两个不相等的整数的差的绝对值的最小值是 1.

3. {整数} = {偶数}∪{奇数}. 对于奇数和偶数有以下性质：

(ⅰ) 任意多个偶数的和、差、积仍为偶数.

(ⅱ) 奇数个奇数的和、差仍是奇数.

(ⅲ) 偶数个奇数的和、差为偶数.

(ⅳ) 奇数与偶数的和为奇数，其积为偶数.

4. 自然数包含有零和正整数，有无限个，为了用有限个数字符号表示出无限个自然数，人们发明了进位制. 我们通常采用十进制记数，10 是这种进位制的基，其实任意大于 1 的整数 k 都可以作为进位制的基. 非零自然数 N 的 k 进制记数式为 $(a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0)_k$，就是

$$N = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_2k^2 + a_1k + a_0,$$

其中 $a_i \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}$，$i=0,1,2,\cdots,n$，但 $a_n \neq 0$.

k 进制记数法的基本原则是"逢 k 进 1".

一般地讲，未注明基的记数式都表示十进制数.

5. 最小数原理：

(1) 设 M 是自然数集的一个非空子集，则 M 中必有最小数.

(2) 设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最小数.

推论　设 M 是实数集的一个有限的非空子集，则 M 中必有最大数.

例 题 精 讲

例1 设正整数 d 不等于 2,5,13. 证明在集合 $\{2,5,13,d\}$ 中可以找到两个不同元素 a, b,使 $ab-1$ 不是完全平方数.

证明 只需证明 $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ 这三个数中至少有一个不是完全平方数即可. 假设

$$2d-1=x^2 \quad ①$$

$$5d-1=y^2, \quad ②$$

$$13d-1=z^2, \quad ③$$

其中 x,y,z 是正整数.

由①知 x 是奇数,不妨设 $x=2n-1$,代入①有

$$2d-1=(2n-1)^2,$$

即
$$d=2n^2-2n+1.$$

可见 d 是奇数. 由②、③知 y,z 是偶数,设 $y=2p$, $z=2q$ 代入②、③可得

$$2d=q^2-p^2=(q+p)(q-p).$$

因 $2d$ 是偶数,即 q^2-p^2 是偶数,所以 p,q 同为奇数或同为偶数,从而 $q+p$ 和 $q-p$ 都是偶数,即 $2d$ 是 4 的倍数,因此 d 是偶数. 矛盾. 命题获证.

例2 在 100×100 的正方形方格表中每小格中写一个整数,使任何两个相邻格中的数之差不多于 20. 求证:至少有 3 个小格中所写的数相同.

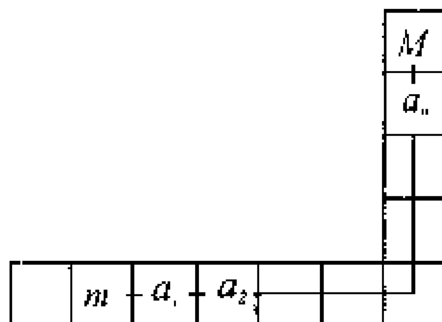


图 3-1

证明 依题意,方格表中总共写了 10000 个数,设这 10000 个数中最大的为 M,最小的为 m. 如图 3-1 所示,从 m 所在方格到 M 所在方格画一折线,由于是 100×100 的表,这条折线至多通过 199 个方格. 设这些方格中的数依次是 $a_0=$

$m, a_1, a_2, \cdots, a_n, M = a_{n+1} (n \leqslant 197)$.

由题设,有 $a_1 - m \leqslant 20, a_2 - a_1 \leqslant 20, \cdots, M - a_n \leqslant 20$. 于是有

$$M - m = (a_1 - m) + (a_2 - a_1) + \cdots + (M - a_n)$$
$$\leqslant 20(n+1) \leqslant 20 \times 198 = 3960.$$

所以,表中最多填了 3961 个不同整数,根据抽屉原理,表中至少有

$$\left[\frac{10000}{3961}\right] + 1 = 3$$

个相同的数.

例 3 设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{1979}$是 $1, 2, \cdots, 1979$ 这些自然数的任意一个排列,为了配对,令 $a_{1980} = 0$,从计算 $b_i = |a_{2i-1} - a_{2i}|$ 得到数列 $b_1, b_2, \cdots, b_{990}$;再从计算 $c_i = |b_{2i-1} - b_{2i}|$ 得到数列 $c_1, c_2, \cdots, c_{495}$ 为了配对,令 $c_{496} = 0$,从计算 $d_i = |c_{2i-1} - c_{2i}|$,得到数列 $d_1, d_2, \cdots, d_{248}$. 如此一直算下去,最后得到一个数 x. 求证:x 是偶数.

证明 因为 $|u - v|$ 与 $u + v$ 奇偶性相同,所以 $b_1 + b_2 + \cdots b_{990}$ 与 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{1980}$的奇偶性相同;$c_1 + c_2 + \cdots + c_{495}$与 $b_1 + b_2 + \cdots + b_{990}$的奇偶性相同,而

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{1980} = 1 + 2 + \cdots + 1979 = \frac{1980 \times 1979}{2}$$

是偶数,所以,x 是偶数.

例 4 将 $1, 2, 3, \cdots, 2n-1, 2n$ 分成两组,每组 n 个数. 设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ 为按递增顺序写出的第一组数;$b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ 为按递减顺序写出的第二组数. 证明:

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n| = n^2.$$

证明 考察任一对数 a_k, b_k,它们不能都大于 n,否则 $n < a_k < \cdots < a_n, b_1 > \cdots > b_k > n$,这样便有$(n+1)$个不同的数 $b_1, \cdots, b_k, a_k, \cdots, a_n$ 都大于n,同理 a_k, b_k 也不能都不大于n. 于是 a_k, b_k 中必有一个不大于 n,另一个不大于 n,分别记作 M_k, m_k. 依题意,$\{M_1, M_2, \cdots, M_n\} = \{n+1, n+2, \cdots, 2n\}$,$\{m_1, m_2, \cdots, m_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$. 于是

$$
\begin{aligned}
& |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_n-b_n| \\
= & (M_1-m_1)+(M_2-m_2)+\cdots+(M_n-m_n) \\
= & (M_1+M_2+\cdots+M_n)-(m_1+m_2+\cdots+m_n) \\
= & [(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+n)]-(1+2+\cdots+n) \\
= & n^2.
\end{aligned}
$$

例 5 求最大的正整数 n,使不等式

$$\frac{8}{15}<\frac{n}{n+k}<\frac{7}{13} \qquad ①$$

对惟一的一个整数 k 成立.

解 ①式等价于

$$\frac{13}{7}<\frac{n+k}{n}<\frac{15}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{7}<\frac{k}{n}<\frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow 48n<56k<49n.$$

$48n+1$ 至 $49n-1$ 中至少含有 $n-1$ 个整数.如果 $n-1\geqslant 2\times 56$,那么其间必含有至少 2 个 56 的倍数,于是

$$n-1<2\times 56,$$

故 $n\leqslant 112$.当 $n=112$ 时,有

$$48\times 112=56\times 96<56\times 97<56\times 98=49\times 112,$$

其中 $k=97$,是满足已知不等式的惟一整数.因此 $n=112$ 为所求.

例 6 设 a,b,c 和 d 是正整数且满足 $r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$.若给定 $a+c\leqslant 1982$,且 $r>0$,求证:$r>\frac{1}{1983^3}$.

证明 依题意

$$r=1-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{bd-ad-bc}{bd}>0,$$

所以 $bd-ad-bc$ 是正整数且 $r\geqslant\frac{1}{bd}$.不妨设 $b\leqslant d$,以下分四种情形:

(ⅰ) 若 $b \leqslant d \leqslant 1983$,则

$$r \geqslant \frac{1}{bd} \geqslant \frac{1}{1983^2} > \frac{1}{1983^3}.$$

(ⅱ) 若 $1983 \leqslant b \leqslant d$,则因 $a + c \leqslant 1982$,故

$$r \geqslant 1 - \frac{a}{1983} - \frac{c}{1983} \geqslant \frac{1}{1983} > \frac{1}{1983^3}.$$

(ⅲ) 若 $b < 1983 \leqslant 1983b \leqslant d$,则

$$r = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \geqslant 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{1983b}$$

$$= 1 - \frac{1982a + (a + c)}{1983b}.$$

显然,$a \leqslant b - 1$. 否则 $r = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} \leqslant -\frac{c}{d} < 0$,与题设矛盾.故

$$r \geqslant 1 - \frac{1982(b-1) + 1982}{1983b} = \frac{1}{1983} > \frac{1}{1983^3}$$

(ⅳ) 若 $b < 1983 < d < 1983b$,则

$$r \geqslant \frac{1}{bd} > \frac{1}{1983b^2} > \frac{1}{1983^3}.$$

综上所述,命题获证.

例 7 三角形表按以下规则给出:在第一行写自然数 a,在每一个数 k 下面的左邻写上 k^2,右邻写上 $k+1$,例如 $a=2$ 时,表如图 3-2.证明:这表中第二行起,同一行的所有数各不相同.

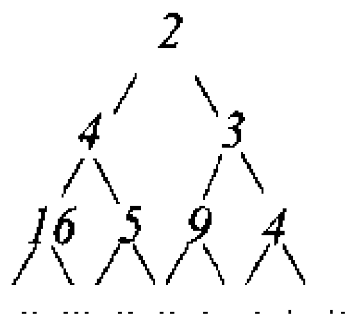


图 3-2

证明 设第 $n(\geqslant 2)$行中数 p 与 q 相等,且 n 是出现相等数的最小行数.则 p 与 q 是由第 $n-1$ 行中数 r 和 s 通过所述规则以不同方式得到的,即可设 $p = r^2$,$q = s + 1$,所以 $s = r^2 - 1$.在从数 a 到数 s 的路线中,可能进行过"平方"或"加 1",而进行平方的最大数不大于 $r-1$(因为 $s = r^2 - 1$).因此,数 s 是在进行了最后一次"平方"后又至少进行了

$$r^2-1-(r-1)^2=2r-2$$

步得到的，而且后面各步都是进行的“加 1”．通过这种方式从 a 到 s 步数不少于 $2r-1$，从而 a 以同样的步数得到的任意数都不小于 $a+2r-1$，注意到 r 与 s 在同一行里，此与 $a+2r-1>r$ 矛盾．于是，得到 s 的方式不会有“平方”，从而 q 是第 n 行中最右边的数，也就是最小的数，这与 $p=q$ 矛盾．

例 8 S_1,S_2,S_3 为非空整数集合，对于分别代表 1,2,3 中某一个不同数字的 i,j,k，若 $x\in S_i,y\in S_j$，则 $x-y\in S_k$．

(1) 证明三个集合中至少有两个相等．

(2) 三个集合中是否可能有两个集合无公共元素．

分析 这是一个较为困难的问题，一时看不出端倪，先从特殊情形下手探路．

假若某个集合含有零元素，如 $0\in S_1$，则任取 $x\in S_2$，有

$$x-0\in S_3$$

即 $x\in S_3$，可见 $S_2\subseteq S_3$，同理 $S_2\supseteq S_3$，所以 $S_2=S_3$．

现假设三个集合 S_1,S_2,S_3 都不含有零元素，则需进一步利用题设条件发掘集合性质．

若 $x\in S_1,y\in S_2$，则 $x-y\in S_3$，对称地应有 $y-x\in S_3$，这启发我们证明：若 $x\in S_1$，则 $-x\in S_1$，其他集合也有同样的性质．事实上这点不难做到．因为当 $y\in S_2,y-x\in S_3$ 时，$(y-x)-y\in S_1$，即 $-x\in S_1$，这使我们进一步想到，集合 S_1,S_2,S_3 中必有正元素．这是一条重要线索．考虑极端情形．设 a 为三个集合中最小的正元素，不妨设 $a\in S_1$，再设 b 是 S_2,S_3 中最小正元素，不妨设 $b\in S_2$，则 $b-a\in S_3$，但 $0<b-a<b$，导致矛盾．

(2) 可能．如 $S_1=S_2=\{奇数\}$，$S_3=\{偶数\}$，显然满足条件，且 S_1 和 S_2 与 S_3 无公共元素．

例 9 令 $T=\{9^k \mid k 为整数,0\leqslant k\leqslant 4000\}$，已知 9^{4000} 有 3817 位数字，它的最左边的数字是 9，问 T 中有多少个元素以 9 为最左边的数字？

解 首先证明,若 9^t 的最左边数字是 9,则 9^{t-1}的最左边数字必定是 1.

否则,若 9^{t-1}的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8 时,显然 $9^{t-1}\times 9=9^t$ 的最左边数为 1,2,3,4,5,6,7,8,不可能是 9.

若 9^{t-1}的最左边数字是 9 时,则

$$9^{t-1}\leqslant\overline{99\cdots9},$$

$$9^t=9^{t-1}\times 9\leqslant\overline{899\cdots91},$$

其最左边的数字也不可能是 9.

同时,我们注意到,若 9^{t-1}的最左边数字是 2,3,4,5,6,7,8,9 时,把 9^{t-1}再乘以 9,最左边会出现进位,即 9^t 比 9^{t-1}增加位数. 而 9^{t-1}的最左边数字是 1,9^t 的最左边数字是 9 时,从 9^{t-1}到 9^t 没有增加位数. 这就是说,从 9^{t-1}到 9^t 时,若 9^t 最左边数字是 9 时,就没有增加位数.

由于 10^{4000}有 4001 位,9^{4000}有 3817 位,所以在连续求 9 的幂时,有

$$4001-3817=184$$

次没有进位. 即 9^k 有 184 个元素以 9 为最左边数字.

例 10 17 的一个倍数写成二进制时恰好有三个数字 1,证明:它至少含有六个数字 0,而如果恰有七个数字 0,那么它是偶数.

证明 注意到 $17=2^4+1$,它在二进制中是$(10001)_2$,$(10001)_2$ 的倍数是

$$(10001)_2\times m=(10000)_2\times m+m$$

若 m 的位数不大于 4,设 $m=(a_1a_2a_3a_4)_2$,其中 $a_i=0$ 或 1,则$(10001)_2\times m=(a_1a_2a_3a_4a_1a_2a_3a_4)_2$,这样各数位中 1 的个数必为偶数,与已知不符,所以 m 至少是 5 位数,$(10001)_2\times m$ 至少是 9 位数. 这样,若$(10001)_2\times m$ 恰好有三个数字 1,则它至少有六个数字 0.

若$(10001)_2\times m$ 恰好有三个数字 1,七个数字 0,则它是 10 位数,m 是 6 位数(通过列乘法竖式就可以看出 m 的位数). 因此设 $m=$

$(1a_2a_3a_4a_5a_6)_2$,这样$(10001)_2\times m$为

$$(1a_2a_3a_4a_5a_6)_2+(1a_2a_3a_4a_5a_60000)_2.$$

假设$a_6=1$,则在a_3,a_4,a_5中至多有1个1.如果$a_2=0$,那么$(10001)_2\times m=(10a_3a_4a_51a_3a_4a_51)_2+(100000)_2$至少有4个1(无论$a_5=0$或1).如果$a_2=1$,那么$(10001)_2\times m=(11a_3a_4a_50a_3a_4a_51)_2+(1000000)_2$,在$a_4=0$时,$(10001)_2\times m$有4个1;在$a_4=1$时,$a_3=0$,这样$(10001)_2\times m$有5个1,都与已知不符,所以,只有$a_6=0$,即$(10001)_2\times m$是偶数.

练 习 三

一、填空题

1. 某数列由自然数组成,其中每连续17项之和为偶数,任连续18项之和为奇数,则此数列至多有______项.

2. 在一种游戏中,"魔术师"请一个人随意想一个三位数$\overline{abc}$,并请此人造出5个数$\overline{acb}$,$\overline{bac}$,$\overline{bca}$,$\overline{cab}$,$\overline{cba}$,求出这5个数的和N,把N告诉"魔术师",于是"魔术师"就可以说出这个人所想的数$\overline{abc}$.

现在设$N=3194$,请你做"魔术师",求出的数$\overline{abc}$应是______.

3. 能使$n!$表示成$n-3$个连续自然数之积的最大的正整数n是______.

4. 一个六位数能够满足下列条件的称其为"超凡平方数":(ⅰ)它的数字都不为零;(ⅱ)它是一个完全平方数;(ⅲ)把这个数分成三段,前两位数字、中间两位数字和后两位数字组成的两位数都是完全平方数.则这样的"超凡平方数"共有______个.

二、解答题

5. 给定20个不超过70的自然数$a_1,a_2,\cdots,a_{20}$,$a_1<a_2<\cdots<a_{20}$.证明:在差$a_j-a_k(j>k)$中至少有4个相同.

6. 一本故事书中共载有30个故事,它们的篇幅分别为1,2,…,30面.自书的第一面起就刊载故事,后续的每一个故事都另起一面,

最多可能有多少个故事是从奇数编号的面起头的?

7. (1) 求出一对自然数 x,y,使得 $xy+x$ 和 $xy+y$ 分别是不同的自然数的平方.

(2)能否在988到1991范围内求到这样的 x 和 y?

8. x_1,x_2 是小于10000的两个自然数,用这两个数可以作出一列数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$,其中 $x_3=|x_1-x_2|$,x_4 等于 $|x_1-x_2|$,$|x_1-x_3|$,$|x_2-x_3|$ 中最小的一个数,x_5 等于 $|x_1-x_2|$,$|x_1-x_3|$,$|x_1-x_4|$,$|x_2-x_3|$,$|x_2-x_4|$,$|x_3-x_4|$ 中最小的一个数,……,对于每一个数,比较它前面任意两个不同数之差的绝对值,再取其中最小的一个. 证明:$x_{21}=0$.

9. 已知在两个连续自然数平方之间的若干个不同的自然数. 求证:它们之中任两对数的乘积都不相等.

10. 设 p,q,r,s 是正整数,且

$$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=s,$$

求证:p,q,r 都是平方数.

11. 在宽大无边的方格纸上(每个小方格的边长为1),规定只允许沿着小方格的边线剪开. 证明:对任意整数 $m>12$,可以剪出一个面积大于 m,边长大于1的矩形,但不能再从这个矩形中剪出一个面积为 m 的矩形.

12. 证明:对任意整数 $a\geqslant 5$,存在整数 b,c,$c\geqslant b\geqslant a$,使得 a,b,c 是一直角三角形的三边长.

第四讲　函　数

知识点和方法述要

1.(1)设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有惟一的元素和它对应,这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f:A\to B$,和 A 中元素 a 对应的 B 中元素 b 叫做 a 的象,a 叫做 b 的原象.这里 A,B 可以是数集、点集或其他集合.映射 $f:A\to B$ 有以下三个特征:

(i) A 中任一元素在 B 中都有象,且象惟一;

(ii) A 中不同元素在 B 中可以有相同的象;

(iii) 不要求 B 中所有元素在 A 中都有原象,若象的集合为 C,则 $C\subseteq B$.

映射是两集合的元素之间的一种特殊对应关系,映射 $f:A\to B$ 包括三个部分:集合 A,集合 B,集合 A 到集合 B 的对应法则 f.这里 A,B 位置不可调换,$f:A\to B$ 与 $f:B\to A$ 是两个不同映射.对于映射 $f:A\to B$,原象属于集合 A,象属于集合 B,对于映射 $f:B\to A$,则相反.

(2) 对于映射 $f:A\to B$,若 B 中每个元素都有原象,则称 f 为 A 到 B 上的满射(或全射).若 A 中不同元素有不同的象,则称 f 为 A 到 B 的单射.若 f 既是满射又是单射,则称 f 为双射或一一映射.

(3) 当 A,B 为非空数集时的满射称为函数.这时 A 是函数的定义域,B 是函数的值域.函数是一种特殊映射.函数 $f:A\to B$ 由定义域 A、值域 B 及对应法则 f 组成.两个函数必须定义域、值域和对应法则完全相同时才表示同一函数.因值域是自变量取定义域内一切值时函数值的集合,由定义域和对应法则所决定,所以,判断两函数是否是同一函数,主要看它们的定义域和对应法则是否相同.

2. (1) 设函数 $y=f(x)$是双射，其定义域为 A，值域为 C，从式子 $y=f(x)$中解得 $x=\varphi(y)$，函数 $x=\varphi(y)$叫做函数 $y=f(x)$的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 通常对调 x,y，把 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$(以后若不作说明均采用这种写法).

(2) 对于一个函数 $y=f(x)$，如果它的反函数是 $y=f^{-1}(x)$，那么函数 $y=f(x)$也是函数 $y=f^{-1}(x)$的反函数，$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的定义域、值域分别是原来函数 $y=f(x)$的值域、定义域. 有 $f^{-1}(f(x))=x$，$f(f^{-1}(y))=y$.

(3) 函数 $y=f(x)$存在反函数的前提是对于 y 在值域中的任何一个值，通过式子 $x=\varphi(y)$(从 $y=f(x)$中解得)，在定义域中都有惟一确定的值和它对应. 求反函数的一般步骤是：(i)把函数式 $y=f(x)$看作以 x 为未知数的方程解出 $x=f^{-1}(y)$；(ii)改写成 $y=f^{-1}(x)$；(iii)写出反函数的定义域、值域分别就是原函数的值域、定义域. 求分段函数的反函数应分段进行.

(4) 函数 $y=f(x)$的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称；若点(a,b)在 $y=f(x)$的图象上，则点(b,a)必在其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象上，反之亦然. 互为反函数的图象具有相同的单调性.

3. (1)函数 $y=x^{\alpha}$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量，α 是常数(现只限于 α 为有理数).

(2) 幂函数 $y=x^{n}$($n=\pm\frac{p}{q}$，$p,q\in N$，p,q 互质，或 $p=0$)的定义域和值域：

		$y=x^{\frac{p}{q}}$	$y=x^{-\frac{p}{q}}$	$y=x^{n}$
p,q 均为奇数	定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	
	值　域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	
p 为奇数	定义域	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
q 为偶数	值　域	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	

		$y=x^{\frac{p}{q}}$	$y=x^{-\frac{p}{q}}$	$y=x^{n}$
p 为偶数	定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	
q 为奇数	值　域	$[0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	
$n=0$	定义域			$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
	值　域			$\{1\}$

(3) 图 4－1 为一些有代表性的函数在第一象限内的图象. 可以看出：

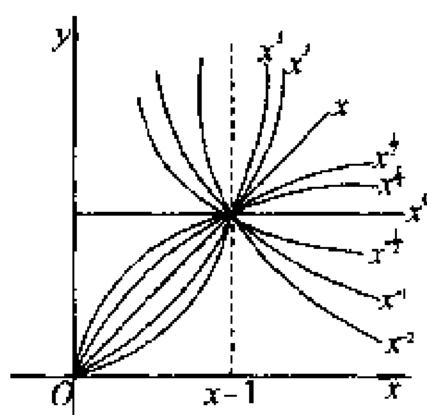


图 4－1

(ⅰ) $n>0$ 时，图象过$(0,0)$、$(1,1)$两点，在区间$[0,+\infty)$上，函数值 y 随 x 增大而增大.

(ⅱ) $n<0$ 时，图象过$(1,1)$点，在区间$(0,+\infty)$内，函数值 y 随 x 的增大而减小.

(ⅲ) 在第一象限内，位于直线 $x=1$ 左侧的图象从下到上，相应的指数由大变小. 反之，位于直线 $x=1$ 右侧的图象由上到下，相应的指数由小变大.

4. (1)下列五种函数称为基本初等函数：幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in R)$ 指数函数 $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$；对数函数 $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 等；反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

(2) 设$f(x)$是一个函数，定义域为 A，值域为 B；$g(x)$为一函数，定义域为 C，值域为 D，则

$$F(x)=f[g(x)]=f\circ g$$

称为 f 和 g 构成的复合函数，其定义域为 C 内使 $g(x)\in A$ 的 x 的集合.

由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和函数复合步骤而成的函数称为初等函数，否则称为非初等函数.

例 题 精 讲

例1 (1) 已知 $f(x)=2x^2+1$，求 $f(2x+1)$；

(2) 已知 $f(2x+1)=2x^2+1$，求 $f(x)$；

(3) 已知 $f(x)$是二次函数，$f(0)=0$，且

$$f(x+1)=f(x)+x+1,$$

试求 $f(x)$的解析式；

(4) 已知 $f(x)=3x-1$，$g(x)=2x+3$，且 $f[h(x)]=g(x)$，求 $h(x)$.

解 (1) $f(2x+1)=2(2x+1)^2+1=8x^2+8x+3$.

(2) 令 $2x+1=t$，则 $x=\frac{1}{2}(t-1)$，于是

$$f(t)=2[\frac{1}{2}(t-1)]^2+1=\frac{1}{2}(t^2-2t+3),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-2x+3)$.

(3) 设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，因 $f(0)=0$，故 $c=0$. 依题设，有

$$\begin{cases}2a+b=b+1,\\a+b=1.\end{cases}$$

解得 $a=b=\frac{1}{2}$. 所以 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

(4) 因为 $f[h(x)]=3h(x)-1$，且

$$f[h(x)]=g(x)=2x+3,$$

所以
$$3h(x)-1=2x+3,$$

即
$$h(x)=\frac{2}{3}(x+2).$$

注 例1(2)、(3)中分别采用了换元法、待定系数法.

例2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}}{x-1}$；

(2) $y=\frac{(2x-1)^0}{\sqrt{x+|x|}}$.

解 (1)

$$\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, & ① \\ 1-x^2\geqslant 0, & ② \\ x-1\neq 0. & ③ \end{cases}$$

由①、②得 $x=\pm 1$，由③得 $x\neq 1$，所以 $x=-1$. 函数的定义域为 $\{-1\}$.

(2)
$$\begin{cases} 2x-1\neq 0, & ③ \\ x+|x|>0. & ④ \end{cases}$$

由④得 $x\neq\frac{1}{2}$，由⑤得 $x>0$. 所以函数的定义域为 $(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},+\infty)$.

注 函数的定义域与值域必须是两个非空数集，否则不是函数. 如 $y=2\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}-\frac{4}{1-x}$，因 x 的集合为 $\varnothing$，故它不是函数.

例 3 求下列函数的值域:

(1) $f(x)=2x^2-6x+5(x\in[-1,2])$;

(2) $f(x)=\frac{x-1}{x^2+2}$;

(3) $f(x)=x+2\sqrt{x+1}$.

解 (1) $f(x)=2(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{2}$. $f(x)$的图象是一段抛物线弧，其最小值 $f(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}$. 当 $x=-1$，$f(x)$有最大值 $f(-1)=13$，所求函数的值域为$[\frac{1}{2},13]$.

(2) 记 $y=f(x)$，则

$$y=\frac{x-1}{x^2+2},$$

可变为 $$yx^2-x+2y+1=0.$$

当 $y=0$ 时，$x=1$；当 $y\neq 0$ 时，$\Delta=1-4y(2y+1)\geqslant 0$，解得 $\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\leqslant y\leqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ $(y\neq 0)$. 所以，函数值域为 $\left[-\frac{1+\sqrt{3}}{4},\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right]$.

(3) 设 $\sqrt{x+1}=t$，则 $t\geqslant 0$，且 $x=t^2-1$. 于是

$$f(x)=t^2-1+2t=(t+1)^2-2\ (t\geqslant 0).$$

所以，函数值域为 $[-1,+\infty)$.

例 4 已知 $f:(0,1)\to\mathrm{R}$，且

$$f(x)=\begin{cases}x & x\notin Q,\\ \frac{p+1}{q} & x=\frac{p}{q},(p,q)=1,0<p<q.\end{cases}$$

当 $x\in(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$ 时，试求 $f(x)$ 的最大值.

解 设 $x=\frac{a}{b}\in(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$，$\frac{a}{b}$ 为既约分数，则

$$\frac{7}{8}<\frac{a}{b}<\frac{8}{9}.$$

显然 $a\neq b-1$. 故由 $\frac{a}{b}\leqslant\frac{b-2}{b}$ 知 $b\geqslant 17$. 且

$$\frac{8}{9}-\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{9b},$$

所以
$$\begin{aligned}&f(\frac{a}{b})-\frac{8}{9}\\ =&\frac{a+1}{b}-\frac{8}{9}\\ =&\frac{1}{b}-(\frac{8}{9}-\frac{a}{b})\\ \leqslant&\frac{1}{b}-\frac{1}{9b}\\ =&\frac{8}{9b}\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{8}{9}\times\frac{1}{17},$$

进而有

$$f\left(\frac{a}{b}\right)\leqslant\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\times\frac{1}{17}=\frac{16}{17}.$$

当 $a=15,b=17$ 即 $x=\frac{15}{17}$时 $f(x)=\frac{16}{17}$.

当 $x\notin Q$ 时,$f(x)_{\max}<\frac{8}{9}$.

综上所述,$\frac{16}{17}$即为所求.

例 5 为了尽快改善职工住房困难,鼓励个人购房和积累建房基金,决定住公房的职工必须按基本工资的高低交纳建房公积金,办法如下:

每月工资	公积金
100 元以下	不交纳
100 元至 200 元	交纳超过 100 元部分的 5%
200 元至 300 元	100 元至 200 元部分交纳 5% 超过 200 元部分交纳 10%
300 元以上	100 元至 200 元部分交纳 5% 200 元至 300 元部分交纳 10% 超过 300 元部分交纳 15%

设职工每月工资为 x 元,交纳公积金后实得数为 y 元,求 y 与 x 之间的函数解析式并画出图象.

解 (i) 当 $0<x<100$ 时,$y=x$;

(ii) 当 $100\leqslant x<200$ 时,

$$\begin{aligned}y&=100+(x-100)(1-5\%)\\&=0.95x+5;\end{aligned}$$

(iii) 当 $200\leqslant x<300$ 时,

$$\begin{aligned}y&=100+100(1-5\%)\\&\quad+(x-200)(1-10\%)\\&=0.9x+15;\end{aligned}$$

(iv) 当 $x \geqslant 300$ 时，$y = 100 + 100(1 - 5\%) + 100(1 - 10\%) + (x - 300)(1 - 15\%) = 0.85x + 30$；

因此，y 与 x 之间的函数解析式表示如下：

$$y = \begin{cases} x, & 0 < x < 100; \\ 0.95x + 5, & 100 \leqslant x < 200; \\ 0.9x + 15, & 200 \leqslant x < 300; \\ 0.85x + 30, & x \geqslant 300. \end{cases}$$

图象为图 4－2 中折线.

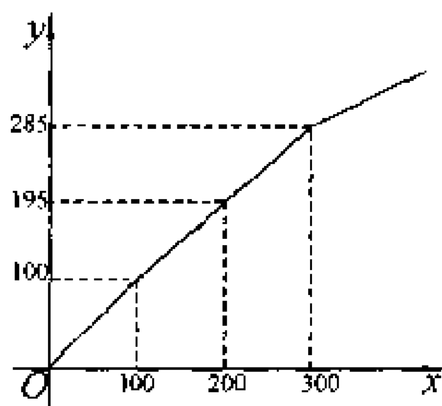


图 4－2

一般地，由于分段函数在每段上具有不同的对应法则，因此，在求分段函数值时，要先判断自变量值所处位置，即位于定义域的哪一段上.

对于分段函数，欲求其反函数也须分段讨论.

例 6 求函数

$$y = \begin{cases} -x(-1 \leqslant x < 0), \\ x - 1(0 \leqslant x \leqslant 1) \end{cases}$$

的反函数.

解 当 $-1 \leqslant x < 0$ 时，由 $y = -x$，得

$$x = -y \quad (0 < y \leqslant 1);$$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，由 $y = x - 1$，得

$$x = y + 1 \quad (-1 \leqslant y \leqslant 0).$$

所以，函数 $y = \begin{cases} x + 1 & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ -x & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$ 即为所求反函数.

本例也可以利用互为反函数的图象的性质求解，请读者自行完成.

例 7 设 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}(x < -1)$，求 $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ 的值.

解 令 $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2} = y$，推得

$$x^2 = \frac{y-1}{y} \quad (x < -1).$$

于是
$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{x-1}{x}}(x < 0).$$

从而,有
$$f^{-1}(-\frac{1}{3}) = -\sqrt{\frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}}} = -2.$$

注 根据函数与其反函数的定义域、值域间关系,只须求出使

$$f(x) = -\frac{1}{3}(x < -1)$$

的 x 的值,即求满足

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x^2} = -\frac{1}{3}, & ① \\ x < -1. & ② \end{cases}$$

由①,②解得 $x = -2$,即为所求 x 的值.

例 8 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x - 2}$,求

$$f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{2}{1001}\right) + f\left(\frac{3}{1001}\right) + \cdots + f\left(\frac{1000}{1001}\right)$$

的值.

分析 逐项累加是不合适的,注意到 $f\left(\frac{1000}{1001}\right) = f\left(1 - \frac{1}{1001}\right)$,作尝试:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(\frac{1000}{1001}\right) &= f\left(\frac{1}{1001}\right) + f\left(1 - \frac{1}{1001}\right) \\ &= \frac{4^{\frac{1}{1001}}}{4^{\frac{1}{1001}} + 2} + \frac{4^{1-\frac{1}{1001}}}{4^{1-\frac{1}{1001}} + 2} \\ &= \frac{4^{\frac{1}{1001}}}{4^{\frac{1}{1001}} + 2} + \frac{2}{4^{\frac{1}{1001}} + 2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

进一步考察，有

$$f\left(\frac{1}{1001}\right)+f\left(\frac{1001-k}{1001}\right)=\frac{4^{\frac{k}{1001}}}{4^{\frac{k}{1001}}+2}+\frac{4^{\frac{1001-k}{1001}}}{4^{\frac{1001-k}{1001}}+2}=1$$

$(1\leqslant k\leqslant 500)$，从而可知，所求和式的值为 500.

例 9 函数 $f(x)$ 定义在整数集上，且满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geqslant 1000);\\ f[f(n+5)] & (n<1000).\end{cases}$$

求 $f(100)$ 的值.

分析 函数以 $n=1000$ 为界分段定义. 若 $n\geqslant 1000$，则可直接求出 $f(n)$，然而欲求的是 $f(100)$ 的值，直接代换就难以达到目的了，一种自然的想法是先在 $n=1000$ 的附近探求一下，看是否能找到能解决问题的入口.

$$f(999)=f[f(999+5)]=f[f(1004)]=f(1001)=998,$$
$$f(998)=f[f(998+5)]=f[f(1003)]=f(1000)=997,$$
$$f(997)=f[f(997+5)]=f[f(1002)]=f(999)=998,$$
$$f(996)=f[f(996+5)]=f[f(1001)]=f(998)=997,$$
$$f(995)=f[f(995+5)]=f[f(1000)]=f(997)=998,$$

……………………………………………………

据上所述，可以猜想

$$f(n)=\begin{cases}998 & (n\text{ 为奇数}),\\ 997 & (n\text{ 为偶数}).\end{cases}\qquad ①$$

再作进一步论证. 事实上，对于任一小于 995 的自然数 n，总存在自然数 m，使

$$995\leqslant n+5m\leqslant 999.$$

若 $n+5m=995$，则经过 $m+1$ 次迭代即一次又一次地进行重复地代换后有

$$f(n)=\underbrace{f(f\cdots f}_{m+1\text{个}f}(995)\cdots),$$

反复利用式①，经过 $m+1$ 次运算，即可得到

$$f(n)=\begin{cases}998 & (n\text{ 为奇数},m\text{ 为偶数});\\ 997 & (n\text{ 为偶数},m\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

同理可证其他情况.

所以 $f(100)=997$.

例 10 证明,恰有一个定义在所有非零实数上的函数 f,满足条件:

(i) 对所有非零实数 x,$f(x)=xf(\frac{1}{x})$;

(ii) 对所有 $x\neq -y$ 的非零实数对 (x,y),有

$$f(x)+f(y)=1+f(x+y).$$

证明 显然函数 $f(x)=x+1$ 满足全部条件,再证惟一性.

令 $y=1$,由已知(ii)得

$$f(x)+f(1)=1+f(x+1)\quad(x\neq -1,0)\qquad①$$

又在已知(ii)中以 $-x$ 代换 x,$x+1$ 代换 y,得

$$f(-x)+f(x+1)=1+f(1)\quad(x\neq -1,0)\qquad②$$

从①,②中消去 $f(x+1)$,$f(1)$得

$$f(x)+f(-x)=2\quad(x\neq -1,0)\qquad③$$

因 $x=1$ 时函数 $f(x)$有定义,故由③知函数 $x=-1$ 处也有定义.

当 $x\neq 0$ 时,由条件(i)及③知

$$\begin{aligned}f(x)&=xf(\frac{1}{x})\\&=x[2-f(-\frac{1}{x})]\\&=2x+(-x)\cdot f(-\frac{1}{x})\\&=2x+f(-x),\end{aligned}$$

即

$$f(x)-f(-x)=2x\qquad④$$

由③,④消去 $f(-x)$,得 $f(x)=x+1$.

练 习 四

一、选择题

1. 在映射 $f:A\to B$ 中,下面说法中正确的是 ( ).

(A)集合 B 是集合 A 中所有元素的象集合.

(B)集合 B 中每一个元素至少与集合 A 中的一个元素相对应.

(C)集合 B 中可能有元素不是集合 A 中的元素的象.

(D)集合 A 中有可能有元素在集合 B 中无象.

2. 在下列集合 A 到集合 B 的对应中,是映射的仅有 ( ).

(A)$A=R,B=R^+,f:x\to\frac{1}{x^2}$

(B)$A=B=N,f:x\to|x-3|$

(C)$A=R,B=\{0,1\},f:x\to\begin{cases}1 & (x\geqslant0),\\0 & (x<0)\end{cases}$

(D)$A=\{2,3\},B=\{6,12,18\},f:a\to a$ 的倍数.

3. 已知 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant4\},B=\{x|0\leqslant x\leqslant2\}$,

(1)$f:x\to\frac{1}{2}x$　　(2)$f:x\to x-2$

(3)$f:x\to\sqrt{x}$　　(4)$f:x\to|x-2|$

其中能构成映射的个数是 ( ).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

4. 设 $X=\{-1,0,1\},Y=\{-2,-1,0,1,2\}$,且对 X 的所有元素 x,有 $x+f(x)$均为偶数,则从 X 到 Y 的映射 f 的个数是 ( ).

(A)7　　(B)10　　(C)12　　(D)15

5. 集合 $M=\{a,b,c\},T=\{-1,0,1\}$由 M 到 T 的映射 f 满足 $f(a)-f(b)=f(c)$.这样的映射的数目是 ( ).

(A)2　　(B)4　　(C)5　　(D)7

6. 由$\{a,b,c,d\}$到$\{1,2,3\}$上的映射 f,使 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=8$ 时,这样的映射的总数是 ( ).

(A)24　　　(B)19　　　(C)17　　　(D)16

二、填空题

7. $f(x)$具有以下性质：$f(\frac{x-1}{x})=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$ ________.

8. $f(x)=(1+\frac{x}{2})^2-2, x\in[-2,+\infty)$，则方程 $f(x)=f^{-1}(x)$的解集是________.

9. 函数 $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}, x\in(1,+\infty)$的反函数是________.

10. 已知函数 $f(x)$的定义域为除 0，1 外的全体实数，且满足 $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x$，则有 $f(x)=$ ________.

11. 函数 $y=2-3\sqrt{4x-x^2-3}(x\in[1,2])$的反函数为 $y=f(x)$，则 $f[f(-1)]=$ ________.

12. 设 $0\leqslant x\leqslant 8$，则函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x(x^2+8)(8-x)}}{x+1}$的值域是________.

三、解答题

13. 已知 $f(x)=1-x, g(x)=\frac{1}{2-f(x)}$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

14. 设 $A=\{-1,0,1\}, B=\{-2,-1,0,1,2\}, f: A\to B$

(1) 对 A 的所有元素 x，$xf(x)$为常数的映射 f 有几个？

(2) 对 A 的所有元素 x，$x+f(x)$为偶数的映射 f 有几个？

(3) 对 A 的所有元素 x，满足 $f(x)=f(x^2)$的映射 f 有几个？

15. 已知函数 $y=f(x)$的定义域是$[0,1]$，求函数 $F(x)=f(x+a)+f(x-a)$的定义域.

16. 设 $a\in(0,1)$，$f(x)$为定义在$[0,1]$上的函数，满足 $f(0)=0$，$f(1)=1$，且对 $x,y\in[0,1], x\leqslant y$ 有 $f(\frac{x+y}{2})=(1-a)f(x)+af(y)$，求 $f(\frac{1}{7})$.

17. 设 Q 是全体有理数的集合,求适合下列两个条件时从 Q 到 Q 的所有函数:

(i) $f(1)=2$;

(ii) 对 Q 中所有的 x 和 y,有

$$f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1.$$

第五讲　函数的性质与图象

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 函数单调性

(1) 对于给定区间上的函数 $f(x)$,如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,都有 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$),那么称 $f(x)$ 在这个区间上是增(减)函数.

(2) 如果函数 $f(x)$ 在某个区间上是增(减)函数,则称 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性,这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

函数的单调性反映了函数在某些区间上变化的趋势.

(3) 利用函数单调性证明函数在给定区间上单调性的一般步骤是:

(i) 在给定区间上任取 x_1, x_2,且 $x_1 < x_2$.

(ii) 作差 $f(x_1) - f(x_2)$ 并变形,以便判断 $f(x_1) - f(x_2)$ 的正负(即与零比较大小).若 $f(x_2) > 0$,也可作比 $f(x_1)/f(x_2)$ 再变形,以判断 $f(x_1)/f(x_2)$ 与 1 的大小,进而知道 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

(iii) 根据单调性的定义判断单调性.

注意:x_1, x_2 应是给定区间内的任意两个值,不能用该区间内的特殊值代替.

(4) 判断函数单调性,还可利用已知函数的单调性和图象.

(5) 单调性通常是指函数在其定义域上的性质,是指函数在什么区间上是单调递增的,什么区间上是单调递减的.单调函数是指函数在整个定义域上是单调递增(或减)的.若函数在某区间上具有单调性且在两端有意义,这时单调区间应为闭区间.反之,则为开区间.同一个函数在定义域内可以出现几个不同的单调递增(减)区间.

(6) 设 $f(x)$ 在区间 I_1 和 I_2 上都分别是单调递增(或递减),且

$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$,则 $f(x)$在 $I_1 \cup I_2$ 上也是单调递增(或递减)的(若$I_1 \cap I_2 = \emptyset$,则不一定成立,如 $y=\frac{1}{x}$在$(0,+\infty)$和$(-\infty,0)$上均为单调递减,但在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上不是单调递减的).

(7) 设 $f(x)$在区间 I 上是单调递增(或递减)函数且 $f(x)$的值域为 E,则它在 I 上必存在反函数且反函数在 E 上必是单调递增(或递减)函数.

特别地,单调函数必有反函数,任何函数在某一单调区间上都存在反函数且反函数的单调性与原函数是一致的.

(8) 关于复合函数 $y=f(\varphi(x))$.

(i) 若 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$单调性相同,则 $F(x)=f(\varphi(x))$是增函数.

(ii) 若 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$单调性相反,则 $F(x)=f(\varphi(x))$是减函数.

2. 函数的奇偶性

(1) 对于函数 $f(x)$,若对于定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$叫做奇函数;如果对于定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那么函数 $f(x)$叫做偶函数.

(2) 奇偶性是函数的一个整体性质,须在整个定义域上考察.定义域在数轴上的表示关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件.用定义判断函数 $f(x)$奇偶性的一般步骤是:

(i) 考察定义域在数轴上的表示是否关于原点对称.若关于原点不对称,则 $f(x)$是非奇非偶函数.

(ii) 若定义域在数轴上的表示关于原点对称,则再计算 $f(-x)$.当 $f(-x)=-f(x)$或 $f(-x)+f(x)=0$ 时函数 $f(x)$是奇函数;当 $f(-x)=f(x)$或 $f(-x)-f(x)=0$ 时函数 $f(x)$是偶函数.否则 $f(x)$为非奇非偶函数.

(3) 既为奇函数又为偶函数的函数是存在的,且有无穷多个,其函数值均为 0,定义域在数轴上的表示是关于原点对称的区域.

(4) 在共同的定义域上，两个偶(奇)函数和、差、积仍为偶(奇)函数，一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数，$f(x)$与$\frac{1}{f(x)}$($f(x)\neq 0$)具有相同的奇偶性.

(5) 偶函数且非奇函数必不存在反函数.

3. 函数的周期性

(1) 如果存在非零常数 T，使对函数 $f(x)$的定义域上任意值 x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，那么 $f(x)$叫做以 T 为周期的周期函数

(2)周期函数具有无穷多个周期.如果其周期存在着最小正值，则称其为最小正周期.并不是任何周期函数都有最小正周期，一个十分著名的例子是狄里赫勒函数.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in\{\text{有理数}\},\\ 0 & x\in\{\text{无理数}\}.\end{cases}$$

常量函数 $f(x)=a(x\in R)$，同样是无最小正周期的周期函数.

4. 图象的对称性

(1) (i) 偶函数的图象关于 y 轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

(ii) $f(x+a)=f(a-x)$或 $f(x)=f(2a-x)$(a 为常数)，则函数图象关于 $x=a$ 对称.

(iii) $y=f(x)$与 $y=f(-x)$关于 y 轴对称；$y=f(x)$与 $y=-f(x)$关于 x 轴对称；$y=f(x)$与 $y=-f(-x)$关于原点对称；$y=f(x)$与 $x=f(y)$关于 $y=x$ 对称.

(2) 平移变换

(i) $y=f(x-a)(a>0)$是将 $y=f(x)$的图象向右平移 a 个单位.

(ii) $y=f(x+a)(a>0)$是将 $y=f(x)$的图象向左平移 a 个单位.

(iii) $y=f(x)+b(b\neq 0,b\in R)$是将 $y=f(x)$的图象向上($b>0$)或向下($b<0$)平移 b 个单位.

(3) 翻折变换

(i) $y=|f(x)|$的图象可以看作 $y=f(x)$的图象在 x 轴上方不变,x 轴下方沿 x 轴向上翻折后所得.

(ii) $y=f(|x|)$的图象可以看作 $y=f(x)$的图象在 y 轴右方不变,并将 y 轴右方的图象沿 y 轴向左翻折所得.

(iii) $x=f(y)$可以看作 $y=f(x)$的图象关于 $y=x$ 翻折后所得.

5. 若$f(x)$,$g(x)$是定义在同一区间上的两个函数.

(i) $f(x)$,$g(x)$是增函数(或减函数),则 $f(x)+g(x)$也必为增函数(或减函数).

(ii) 若$f(x)$,$g(x)$恒大于 0,且 $f(x)$,$g(x)$都是单调递增(或减)的,则 $f(x)\cdot g(x)$也为增函数(或减函数).

例 题 精 讲

例 1 证明函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在区间$[1,+\infty)$上是减函数,试问 $f(x)$在区间$(-\infty,-1]$上是否也是减函数? 在$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$上呢?

解 设 $1\leqslant x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$,且 $1-x_1x_2<0$,从而

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\frac{x_2}{1+x_2^2}-\frac{x_1}{1+x_1^2}\\&=\frac{x_2(x_1^2+1)-x_1(x_2^2+1)}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\&=\frac{x_2x_1^2-x_1x_2^2+x_2-x_1}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}\\&=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}<0,\end{aligned}$$

所以函数 $f(x)$在区间$[1,+\infty)$上是减函数.

由上述论证过程可知,当任取 x_1,x_2 满足 $x_1<x_2\leqslant-1$ 时,仍有

$$f(x_2)-f(x_1)<0,$$

所以函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1]$上也是减函数，而函数$f(x)$在区间$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$上显然不是增函数，但也不是减函数．事实上，$f(-1)=-\frac{1}{2}$，$f(1)=\frac{1}{2}$，$f(-1)<f(1)$．

注 函数的单调区间可以是整个定义域，也可以是定义域的一部分；可以是包含端点的闭区间，也可以是不包含端点的开区间或半开半闭的区间，对于具体函数来说可能有单调区间，也可能没有单调区间，如前而提到的狄里赫勒函数就没有单调区间．同一函数在定义域内出现几个不同的单调递增（减）区间时，在这些区间的并集上不一定是增（减）函数，书写时一般应分开，不宜用"$\cup$"相连，如例1所示．

例2 已知函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上是增函数，a、b是实数．

(1) 证明命题"如果$a+b\geqslant0$，那么$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$．"

(2) 判断(1)中的命题的逆命题是否正确，并证明你的结论．

解 (1)当$a+b>0$时，$a>-b$，$b>-a$．又函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，故$f(a)>f(-b)$，$f(b)>f(-a)$．

当$a+b=0$时，$a=-b$，$b=-a$，

故$f(a)=f(-b)$，$f(b)=f(-a)$．

综上所述，当$a+b\geqslant0$时，$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$．

(2) 逆命题是：如果$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$，

那么$a+b\geqslant0$．

上述命题是正确的，以下用反证法给出证明：如果$a+b\geqslant0$不成立，则$a+b<0$，从而$a<-b$，$b<-a$．根据$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数，有$f(a)<f(-b)$，$f(b)<f(-a)$．所以有

$$f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b).$$

这与题设条件$f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$矛盾，故$a+b\geqslant0$成

立.命题获证.

注 通过(1)的论证,我们对函数 $f(x)$ 的性质有了更进一层的了解.在此基础上,(2)的解答施行反证法也就在情理之中.

例 3 设函数 $f(x)$ 对一切 $x>0$ 有定义,且满足:

(i) $f(x)$ 在定义域内严格递增;

(ii) 对一切 $x>0$,有 $f(x)\cdot f\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)=1$.

试求 $f(1)$.

解 令 $f(1)=a$,在(ii)中,取 $x=1$,可得

$$af(a+1)=1,$$

即

$$f(a+1)=\frac{1}{a}. \quad ①$$

再令 $x=a+1$,又由条件可得

$$f(a+1)\cdot f\left(f(a+1)+\frac{1}{a+1}\right)=1. \quad ②$$

将①代入②得

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=a,$$

即

$$f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}\right)=f(1),$$

故

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}=1,$$

解得 $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$,但 $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时,有

$$1<a=f(1)<f(1+a)=\frac{1}{a}<1,$$

导致矛盾.故仅有 $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 满足题设要求,即 $f(1)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

例 4 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

(2) $g(x)=|2x+1|-|2x-1|$;

(3) $\varphi(x)=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}$.

解 (1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1)$，$x=1$ 没有定义，$x=-1$ 有定义，定义域关于原点不对称，故函数 $f(x)$ 既不是奇函数又不是偶函数.

(2)
$$\begin{aligned}g(-x)&=|2\cdot(-x)+1|-|2\cdot(-x)-1|\\&=|1-2x|-|1+2x|\\&=-(|2x+1|-|2x-1|)\\&=-g(x).\end{aligned}$$

函数 $g(x)$ 是奇函数.

(3) $\varphi(x)$ 的定义域是 $\{-1,1\}$，且 $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$，满足 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\varphi(-x)=-\varphi(x)$，故函数 $\varphi(x)$ 既是奇函数又是偶函数.

例 5 已知

$$f(x)=\begin{cases}x(1-x) & (x>0),\\0 & (x=0),\\x(1+x) & (x<0).\end{cases}$$

(1) 证明 $f(x)$ 是奇函数；

(2) 画出函数图象.

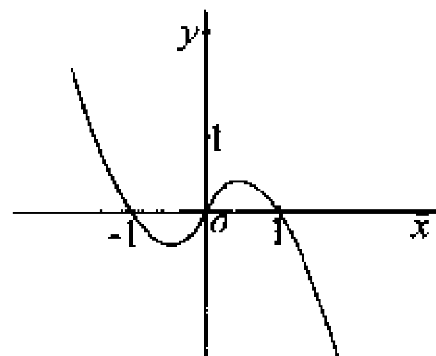


图 5－1

解 (1) 当 $x<0$ 时，$-x>0$，

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)[1-(-x)]\\&=-x(1+x)=-f(x);\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$f(-0)=0=f(0)$；

当 $x>0$ 时，$-x<0$，

$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)[1+(-x)]\\&=-x(1-x)=-f(x).\end{aligned}$$

综上所述，$f(x)$ 是奇函数.

(2) 画出函数 $f(x)=x(1+x)(x\leqslant 0)$ 的图象，再作其关于原点对称图象，即得函数 $f(x)$ 的图象如图 5－1 所示.

不难证明，若一个定义在对称区间 $[-d,-c]\cup[c,d]$ 上的奇函

数在子区间$[c,d]$上递增(减)，则它在子区间$[-d,-c]$上递增(减).

事实上，任取x_1,x_2，满足$-d\leqslant x_1<x_2\leqslant -c$，则$c\leqslant -x_2<-x_1\leqslant d$，且

$$f(-x_2)<f(-x_1),\qquad ①$$

又$f(x)$是奇函数，故由①得

$$-f(x_2)<-f(x_1),$$

即
$$f(x_1)<f(x_2),$$

故命题获证.

关于偶函数也有相类似的结论.请读者自己给出.

例6 设$a>0$，函数$f(x)$的定义域为R.且

$$f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-[f(x)]^2},$$

证明函数$f(x)$是一周期函数.

证明 依题设，有

$$\begin{aligned}f(x+2a)&=f[(x+a)+a]\\&=\frac{1}{2}+[f(x+a)-f^2(x+a)]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}+[\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\\&\quad-\left(\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}\right)^2]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}+[\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)]^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}+|f(x)-\frac{1}{2}|.\qquad ①\end{aligned}$$

因
$$f(x)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x-a)-f^2(x-a)}\geqslant\frac{1}{2},$$

故由①得
$$f(x+2a)=f(x)\qquad ②$$

注意到$a>0$，②说明了函数$f(x)$是以$2a$为周期的函数.

例7 (1)若定义在实数集 R 上的函数$f(x)$的图象关于直线 $x=a$ 和直线$x=b$ 都对称($a\neq b$),则 $f(x)$是周期函数.

(2) 若定义在 R 上的函数$f(x)$对任何 $x\in R$,有

$$f(2+x)=f(2-x),$$

$$f(7+x)=f(7-x),$$

且已知 $x=0$ 是方程 $f(x)=0$ 的一个根,问方程在区间$[-1000,1000]$上至少有多少个实根?

解 (1)首先,因函数的图象关于直线 $x=a$ 对称,故对任意 $x\in R$,有

$$f(x)=f(2a-x), \quad ①$$

又函数 $f(x)$图象关于直线 $x=b$ 对称,故对任意 $t\in R$,有

$$f(b-t)=f(b+t). \quad ②$$

令 $b-t=2a-x$,则

$$b+t=b+(b+x-2a)=x+2(b-a). \quad ③$$

由①,②,③有

$$f(x)=f[x+2(b-a)]. \quad ④$$

因 $a\neq b$,故由④知函数 $f(x)$是以 $2(b-a)$为周期的函数.

(2)根据题设条件及(1)的结论,知函数 $f(x)$是以 10 为周期的函数.

因函数 $f(x)$的图象关于直线 $x=2,x=7$ 对称,故 $f(4)=f(0)$, $f(10)=f(4)$. 因 $f(0)=0$,所以函数 $f(x)$在区间$(0,10]$内至少有两个实根 $x=4,x=10$. 现区间$[-1000,1000]$一共包含有 200 个周期,连同区间端点,方程 $f(x)=0$ 在区间$[-1000,1000]$上至少有

$$200\times2+1=401$$

个实根.

注 例7(1)是函数图象的对称性和周期性结合的一个重要性质.

下面一例涉及到函数的奇偶性、周期性、单调性等诸多方面.

例8 函数 $f(x)$定义域为$(4ka,4(k+1)a)$,$k\in Z$,a 为正常数.

对定义域中任意数 x,在定义域中存在 x_1,x_2,使 $x=x_1-x_2$,$f(x_1)\neq f(x_2)$,且 $f(x)$满足以下三个条件:

(i) 若 $x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$f(x_1)\neq f(x_2)$,则

$$f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)};$$

(ii) $f(a)=1$;

(iii) 当 $0<x<2a$ 时,$f(x)>0$.

试证:

(1) $f(x)$是奇函数;

(2) $f(x)$是周期函数,并求出其周期;

(3) $f(x)$在$(0,4a)$内是减函数.

证明 (1)对定义域内任意 x,依题设存在 x_1,x_2,使 $x=x_1-x_2$,且 $f(x_1)\neq f(x_2)$,有

$$\begin{aligned}f(x)=f(x_1-x_2)&=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_2)-f(x_1)}\\&=-\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}\\&=-f(x_2-x_1)=-f(-x),\end{aligned}$$

所以 $f(x)$为奇函数.

(2) 因 $f(x)$是奇函数,$f(a)=1$,故 $f(-a)=-1$,于是

$$f(-2a)=f(-a-a)=\frac{f(-a)\cdot f(a)+1}{f(a)-f(-a)}=0$$

若 $f(x)\neq0$,则

$$\begin{aligned}f(x+2a)=f[x-(-2a)]&=\frac{f(x)\cdot f(-2a)+1}{f(-2a)-f(x)}\\&=-\frac{1}{f(x)},\end{aligned}$$

进而

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}$$

$$= -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x).$$

若 $f(x)=0$,则

$$f(x+a)=f[x-(-a)]=\frac{f(x)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(x)}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$f(x+3a)=f[(x+a)+2a]=-\frac{1}{f(x+a)}=1,$$

$$f(x+4a)=f[(x+3a)-(-a)]$$
$$=\frac{f(x+3a)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(x+3a)}=0.$$

可见,仍有 $f(x+4a)=f(x)$.

综上所述,$f(x)$为周期函数,$4a$ 是其一个周期.

(3) 先证 $f(x)$在区间$(0,2a]$上是减函数.事实上,任取 x_1,x_2,满足 $0<x_1<x_2\leqslant 2a$,则 $0<x_2-x_1<2a$,又有

$$f(2a)=f[4a+(-2a)]=f(-2a)=0.$$

根据(iii),有 $f(x_1)>0,f(x_2)\geqslant 0$,且

$$\frac{f(x_2)\cdot f(x_1)+1}{f(x_1)-f(x_2)}=f(x_2-x_1)>0,$$

故 $f(x_1)>f(x_2)$,知 $f(x)$在区间$(0,2a]$上是减函数.

当 $x\in(2a,4a)$时,又任取 x_3,x_4,满足 $2a<x_3<x_4<4a$,则 $0<x_3-2a<x_4-2a<2a$,有

$$f(x_3-2a)>f(x_4-2a)>0$$

又由(iii)知 $f(x-2a)\neq 0$.有

$$f(x)=f[(x-2a)+2a]=-\frac{1}{f(x-2a)}<0,x\in(2a,4a)$$

故
$$f(x_3)-f(x_4)=-\frac{1}{f(x_3-2a)}-\left(-\frac{1}{f(x_4-2a)}\right)$$
$$=\frac{1}{f(x_4-2a)}-\frac{1}{f(x_3-2a)}>0.$$

以上说明 $f(x)$在区间$(2a,4a)$内也是减函数.

显然,由上述推导可知,对于任意的 $0<x_1<x_2<4a$,总有 $f(x_1)>f(x_2)$,即 $f(x)$ 在区间 $(0,4a)$ 内是减函数.

例 9 函数 $y=f(x)$ 定义在整个实轴上,它的图象在围绕坐标原点旋转角 $\frac{\pi}{2}$ 后不变.

(1) 证明:方程 $f(x)=x$ 恰有一个解;

(2) 试给出一个具有上述性质的函数.

解 (1) 设 $f(0)=y_0$,则 $(0,y_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 的图象上的点,把该点按同一方向绕原点旋转两次,每次旋转角度为 $\frac{\pi}{2}$,得到点 $(0,-y_0)$ 仍在 $y=f(x)$ 的图象上,所以 $y_0=f(0)=-y_0$,得 $y_0=0$,即 $f(0)=0$,也就是说 $x=0$ 是方程 $f(x)=x$ 的一个解.

另一方面,设 $x=x_0$ 是方程 $f(x)=x$ 的一个解,即 $f(x_0)=x_0$,因此,点 (x_0,x_0) 在函数 $y=f(x)$ 的图象上,它绕原点旋转三个 $\frac{\pi}{2}$ 后得到点 $(x_0,-x_0)$,且此点也在 $y=f(x)$ 的图象上,所以
$x_0=f(x_0)=-x_0$,得 $x_0=0$.

综上所述,方程 $f(x)=x$ 恰有一个解 $x=0$.

(2)构造函数如下:

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x=0),\\ x+1 & (2k<x\leqslant 2k+1,k\in N\cup\{0\}),\\ -x+1 & (2k+1<x\leqslant 2k+2,k\in N\cup\{0\}),\\ -x-1 & (-2k-2<x\leqslant -2k-1,k\in N\cup\{0\}),\\ x-1 & (-2k-1<x\leqslant -2k,k\in N\cup\{0\}),\end{cases}$$

图象如图 5-2 所示.

例 10 解方程

$$(3x-1)\left(\sqrt{9x^2-6x+5}+1\right)+(2x-3)\left(\sqrt{4x^2-12x+13}+1\right)=0.$$

解 原方程即

$$(3x-1)\left(\sqrt{9x^2-6x+5}+1\right)$$

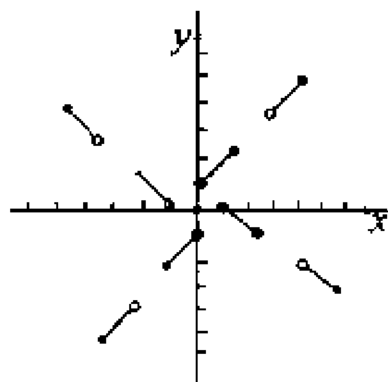


图 5－2

$$= (3-2x)\left(\sqrt{4x^2-12x+13}+1\right). \qquad ①$$

①式可改写成

$$(3x-1)\left(\sqrt{(3x-1)^2+4}+1\right)$$
$$= (3-2x)\left(\sqrt{(2x-3)^2+4}+1\right). \qquad ②$$

考虑函数 $f(t)=t(\sqrt{t^2+4}+1)$，显见 $f(t)$ 为奇函数，且当 $t_2>t_1\geqslant 0$ 时，$f(t_2)>f(t_1)$，故 $f(t)$ 是严格递增函数.

由②式知

$$f(3x-1)=f(3-2x),$$

由上述函数 $f(t)$ 性质可知

$$3x-1=3-2x,$$

解得 $x=\frac{4}{5}$.

练 习 五

一、填空题

1. 已知函数 $f(x)=|x+a|$ 当 $x\geqslant 3$ 时为增函数，则 a 的取值范围为________.

2. 设函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(\frac{1}{2},2)$ 内是增函数，则 $y=f(x^2-1)$ 的单调递减区间为________.

二、选择题

3. 设有三个函数,第一个是 $y=\varphi(x)$,其反函数是第二个函数,而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称,那么第三个函数是 (　　).

(A) $y=-\varphi(x)$　　(B) $y=-\varphi(-x)$

(C) $y=-\varphi^{-1}(x)$　　(D) $y=-\varphi^{-1}(-x)$

4. 设 $f(x)$是区间$(-\infty,+\infty)$上的奇函数,$f(x+3)=-f(x)$,当 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时,$f(x)=x$,则 $f(1997)$等于 (　　).

(A) 1　(B) 0　(C) -1　(D) 1997

5. 奇函数 $f(x)$存在反函数 $f^{-1}(x)$,若把 $y=f(x)$的图象向上平移3个单位,向右平移2个单位后,再关于直线 $y=-x$ 对称,所得到的曲线对应的函数是 (　　).

(A) $y=f^{-1}(x-3)+2$

(B) $y=f^{-1}(x-2)+3$

(C) $y=f^{-1}(x+3)-2$

(D) $y=f^{-1}(x+2)-3$

6. 定义在 R 上的函数 $y=f(x)$有反函数,则函数 $y=f(x+a)+b$ 的图象与 $y=f^{-1}(x+a)+b$ 的图象间的关系是 (　　).

(A) 关于直线 $y=x+a+b$ 对称

(B) 关于直线 $x=y-a-b$ 对称

(C) 关于直线 $y=x+a-b$ 对称

(D) 关于直线 $x=y-a+b$ 对称

7. 函数 $f(x)$在$(0,2)$内是增函数,函数 $f(x+2)$是偶函数.则 (　　).

(A) $f(1)<f(\frac{5}{2})<f(\frac{7}{2})$　(B) $f(\frac{7}{2})<f(1)<f(\frac{5}{2})$

(C) $f(\frac{7}{2})<f(\frac{5}{2})<f(1)$　(D) $f(\frac{5}{2})<f(1)<f(\frac{7}{2})$

三、解答题

8. 试判断函数 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}+3$ 在区间$(0,1)$上的增减

性.

9. 已知函数 $f(x)=x^3+x+1(x\in\mathrm{R})$,求证

(1) $f(x)$为 R 内的增函数.

(2) 满足等于 $f(x)=0$ 的实数 x 的值至多只有一个.

10. 已知函数 $y=f(x)(x\neq0)$的图象关于 y 轴对称,且 $f(x)\neq0$.函数 $y=g(x)(x\neq0)$的图象关于原点对称且 $g(x)\neq0$.求证:$F(x)=\dfrac{[f(x)]^2-[g(x)]^2}{f(x)\cdot g(x)}$的图象关于原点对称.

11. 证明:任何定义域在数轴上的表示关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

12. 已知 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$,$g(x)$与 $f(x)$互为反函数,对于任意 $a,b\in\mathrm{R}$,有

$$f(a+b)=f(a)\cdot f(b).$$

求证:$g(a\cdot b)=g(a)+g(b)$.

13. 设函数 $f(x)$是定义在 R 上的以 2 为周期的函数,且当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)=x^2$.求证:函数 $f(x)$为偶函数.

14. 设函数 $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{4x+1}{3x+2}}$.解方程:$f(x)=f^{-1}(x)$.

15. 函数 $f(k)$是定义在 N 上,在 N 中取值的严格递增函数,并且满足条件 $f(f(k))=3k$,试求 $f(1)+f(9)+f(96)$之值.

第六讲　函数 $f(x)=ax^2+bx+c$

知 识 点 和 方 法 述 要

形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的函数是最基本且具有代表性的函数，在中学代数中占有极为重要的地位.它包含有二次函数($a\neq0$)、一次函数($a=0,b\neq0$)、常量函数($a=b=0$).

常量函数 $f(x)=c$ 的图象是一条平行于 x 轴或与 x 轴重合的直线.

一次函数 $f(x)=bx+c(b\neq0)$ 的图象是一条直线.

函数 $f(x)=bx+c,x\in[\alpha,\beta]$ 的图象是一直线段.如图 6-1.

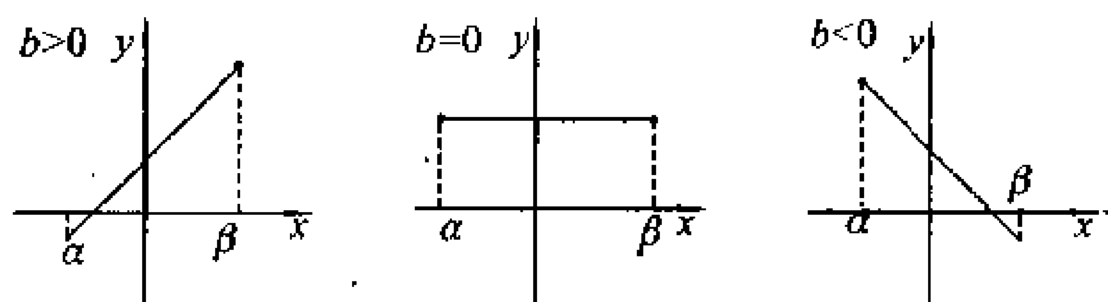


图 6-1

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0,x\in\mathrm{R})$ 的图象是一抛物线.

$a>0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 6-2 所示.

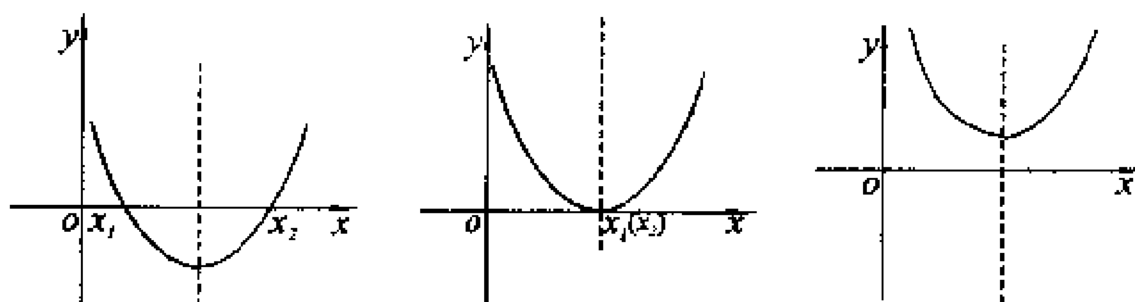


图 6-2

$a<0$ 时，$f(x)$ 的图象如图 6-3 所示.

(1) 函数的零点(即方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实根).

(Ⅰ) $\Delta=b^2-4ac>0\Leftrightarrow$ 两个不同的零点.

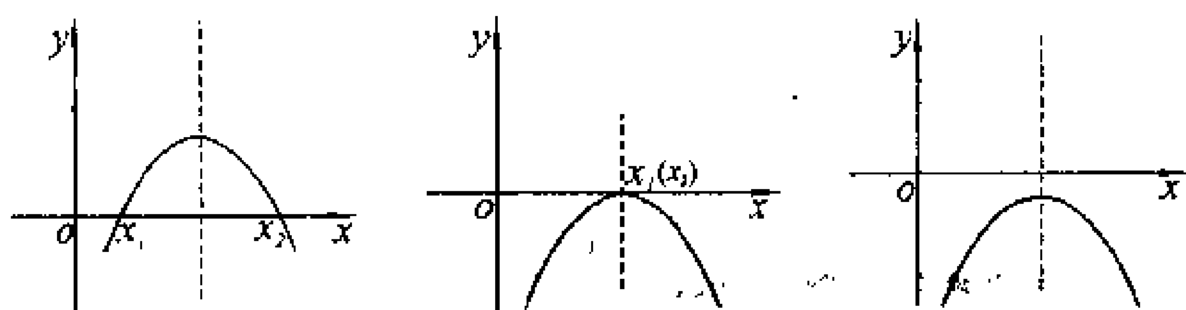


图 6－3

(ii) $\Delta=b^2-4ac=0\Leftrightarrow$两个相等的零点.

(iii) $\Delta=b^2-4ac<0\Leftrightarrow$无零点.

(2) 函数的正负值区间.

(i) $\Delta>0$时,若 $a>0$,则$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$为正值区间,$(x_1,x_2)$为负值区间;若 $a<0$,(x_1,x_2)为正值区间,$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$为负值区间.其中 x_1,x_2 为函数零点,$x_1<x_2$.

(ii) $\Delta=0$时,$f(x_1)=f(x_2)=0$,$x_1=x_2$,(x_1,x_2 为函数零点).若 $a>0$,$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$为正值区间,无负值区间;若 $a<0$,$(-\infty,x_1)\cup(x_2,+\infty)$为负值区间,无正值区间.

(iii) $\Delta<0$时,若 $a>0$,$f(x)>0$;若 $a<0$,$f(x)<0$.

(3) 单调性.

(i) 若 $a>0$,$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$为单调递减区间,$[-\frac{b}{2a},+\infty)$为单调递增区间.

(ii) 若 $a<0$,$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$为单调递增区间,$[-\frac{b}{2a},+\infty)$为单调递减区间.

(4) 函数的最大值和最小值.

(i) $a>0$时,$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.此时 $x=-\frac{b}{2a}$.

(ii) $a<0$时,$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.此时 $x=-\frac{b}{2a}$.

函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$,$x\in[\alpha,\beta]$的图象是一段抛物线弧.

当$-\frac{b}{2a}\notin[\alpha,\beta]$时，有

$$\min\{f(\alpha),f(\beta)\}\leqslant f(x)\leqslant\max\{f(\alpha),f(\beta)\}.$$

当$-\frac{b}{2a}\in[\alpha,\beta]$时，若$a>0$，则

$$f(-\frac{b}{2a})\leqslant f(x)\leqslant\max\{f(\alpha),f(\beta)\};$$

若$a<0$，则

$$\min\{f(\alpha),f(\beta)\}\leqslant f(x)\leqslant f(-\frac{b}{2a}).$$

(5) 二次函数零点的分布.

(i) 若$f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$，则在区间$(\alpha,\beta)$上有且仅有一个零点.

(ii) 当且仅当满足

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\frac{b}{a}>0,\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}$$

时，方程$f(x)=0$有两正根；当且仅当满足

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\frac{b}{a}<0,\\ \frac{c}{a}>0\end{cases}$$

时，$f(x)=0$有两负根；当且仅当$\frac{c}{a}<0$时，$f(x)=0$有一正一负两实根.

(iii) 当且仅当满足下述不等式组时，$f(x)=0$的两根在$[\alpha,\beta]$上.

$a>0$时，如图6-4所示，不等式组为

$$\begin{cases} f(\alpha) \geqslant 0, \\ f(\beta) \geqslant 0, \\ \Delta \geqslant 0, \\ \alpha \leqslant -\dfrac{b}{2a} \leqslant \beta. \end{cases}$$

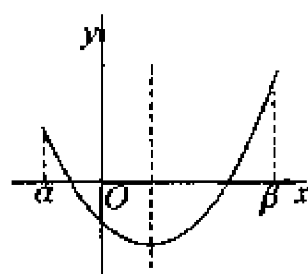


图 6 - 4

$a<0$ 时,如图 6 - 5 所示,不等式组为

$$\begin{cases} f(\alpha) \leqslant 0, \\ f(\beta) \leqslant 0, \\ \Delta \geqslant 0, \\ \alpha \leqslant -\dfrac{b}{2a} \leqslant \beta. \end{cases}$$

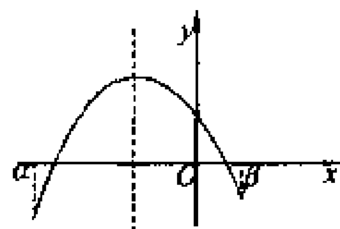


图 6 - 5

例 题 精 讲

例 1 设 $f(x)=ax+\dfrac{1}{a}(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$, a 为正常数,求函数 $f(x)$ 的最小值.

解 依题设, $f(x)=(a-\dfrac{1}{a})x+\dfrac{1}{a}(a>0)$.

当 $0<a<1$ 时, $a-\dfrac{1}{a}<0$, 函数 $f(x)$ 是减函数,因此 $f(x)_{\min}=f(1)=a$.

当 $a>1$ 时, $a-\dfrac{1}{a}>0$, 函数 $f(x)$ 是增函数,因此 $f(x)_{\min}=f(0)=\dfrac{1}{a}$.

当 $a=1$ 时, $a-\dfrac{1}{a}=0$, 函数 $f(x)$ 的值为 1. $f(x)_{\min}=1$.

例 2 对于每个实数,设 $f(x)=\min\{4x+1, x+2, -2x+4\}$. 求函数 $f(x)$ 的最大值.

分析 在同一坐标系中作出三条直线

$$y = 4x + 1, \quad ①$$
$$y = x + 2, \quad ②$$
$$y = -2x + 4. \quad ③$$

直线①,②交点的横坐标是 $x=\frac{1}{3}$,直线②,③交点的横坐标 $x=\frac{2}{3}$.如图 6-6 可知.

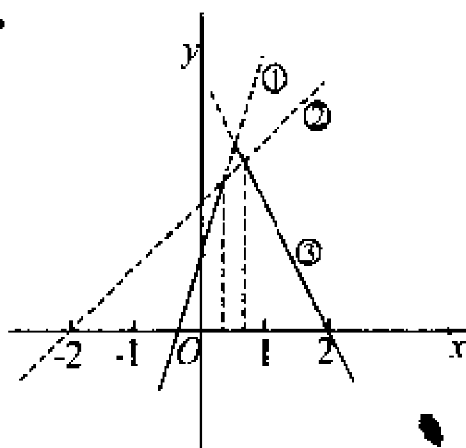


图 6-6

$$f(x)=\begin{cases}4x+1 & (x\leqslant\frac{1}{3});\\ x+2 & (\frac{1}{3}<x\leqslant\frac{2}{3});\\ -2x+4 & (x>\frac{2}{3}).\end{cases}$$

它的图象如图 6-6 中实线所示,是一条折线,其纵坐标的最大值的点恰是直线②,③的交点$(\frac{2}{3},\frac{8}{3})$.所以当 $x=\frac{2}{3}$,$f(x)_{\max}=\frac{8}{3}$.

注 数形结合是数学的一种重要思想方法.借助图象所呈动态进行分析是一条重要途径.

例 3 已知 $f(x)=|1-2x|$,$x\in[0,1]$.试问:方程 $f(f(f(x)))=\frac{1}{2}x$ 有多少个实根?

分析 问题涉及到含绝对值符号的一次函数,依题设,有

$$f(f(x)) = |1-2f(x)|$$
$$= |1-2|1-2x||$$

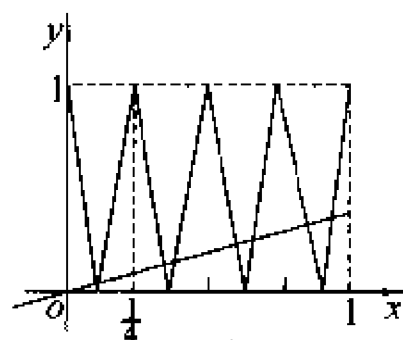


图 6-7

$$=\begin{cases}|4x-1|=\begin{cases}1-4x & (0\leqslant x<\frac{1}{4});\\4x-1 & (\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{1}{2});\end{cases}\\|3-4x|=\begin{cases}3-4x & (\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}),\\4x-3 & (\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 1).\end{cases}\end{cases}$$

其图象是由 4 条线段连成的折线段. 进一步可以知道, 函数 $f(f(f(x)))=|1-2f(f(x))|$是由 8 条小线段连成的折线段,如图 6-7 所示,直线 $y=\frac{1}{2}x$ 过点$(0,0)$,$(1,\frac{1}{2})$. 必与上述 8 条小线段分别相交,所以原方程应有 8 个实根.

例 4 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象经过点$(1,1)$,$(3,5)$,$f(0)>0$.求 a,b,c 使该函数的最小值最大.

解 由 $f(1)=1$,$f(3)=5$,得

$$\begin{cases}a+b+c=1,\\9a+3b+c=5,\end{cases}$$

解之,得 $b=2-4a$,$c=3a-1$,又 $f(0)=c>0$,故 $a>\frac{1}{3}$,所以

$$\begin{aligned}f(x)&=ax^2+(2-4a)x+3a-1\\&=a\left(x+\frac{1-2a}{a}\right)^2+3-(a+\frac{1}{a}),\end{aligned}$$

有 $$f(x)_{\min}=3-(a+\frac{1}{a}).$$

因 $$3-(a+\frac{1}{a})\leqslant 3-2=1,$$

等号当且仅当 $a=1$ 时成立,故 $a=1$,$b=-2$,$c=2$.

例 5 当 m 为何值时,函数

$$f(x)=4x^2-4x+m\quad(x\in[-1,1])$$

有一个零点? 二个零点? 没有零点?

解 首先，$f(-1)=m+8$，$f(1)=m$. 当 $f(-1)\cdot f(1)<0$，即 $(m+8)m<0$，也就是 $-8<m<0$ 时函数 $f(x)$ 有一个零点，且当 $f(-1)=0$，即 $m=-8$ 时，函数 $f(x)$ 也仅有一个零点 $x=-1$.

当 $f(1)=0$，即 $m=0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点 $x=0,1$. 又函数满足下面条件时也有两个零点(包括重合).

$$\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(1)>0, \\ \Delta\geqslant 0, \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} m+8>0, \\ m>0, \\ 16-16m\geqslant 0, \end{cases}$$

解之，得 $0<m\leqslant 1$.

综上所述，当 $-8\leqslant m<0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；当 $0\leqslant m\leqslant 1$ 时有两个零点，当 $m<-8$ 或 $m>1$ 时没有零点.

例 6 已知函数 $f(x)=x^2-2x+2$，$x\in[t,t+1]$. 它的最小值是 $g(t)$，写出函数 $g(t)$ 的表达式.

分析 函数 $f(x)=(x-1)^2+1$ 的图象是顶点为 $(1,1)$，对称轴为 $x=1$，开口向上的抛物线. 函数 $f(x)=(x-1)^2+1$，$x\in[t,t+1]$ 是函数 $f(x)$ 图象上的一段. 要研究它的最小值，须知该抛物线与对称轴的位置关系，即 1 与 $[t,t+1]$ 间从属关系.

(i) 若 $t<0$，$f(x)$ 的图象位于上述抛物线对称轴 $x=1$ 的左侧，函数递减，故 $g(t)=f(t+1)=t^2+1$.

(ii) 若 $0\leqslant t\leqslant 1$，则 $1\in[t,t+1]$，$f(x)$ 的图象包含上述抛物线的顶点，从而 $g(t)=f(1)=1$.

(iii) 若 $t>1$，$f(x)$ 的图象位于上述抛物线对称轴 $x=1$ 的右侧，函数递增，故 $g(t)=f(t)=t^2-2t+2$.

例 7 设二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象以 y 轴为对称轴. 已知 $a+b=1$，而且若点 (x,y) 在 $y=f(x)$ 的图象上，则点 (x,y^2+1) 在函数 $g(x)=f(f(x))$ 的图象上.

(1) 求 $g(x)$ 的解析式.

(2) 设 $F(x)=g(x)-\lambda f(x)$，问是否存在实数 λ，使 $F(x)$ 在

$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$内是减函数，在$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$内是增函数？

解 (1) 因 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 y 轴，故 $b=0$. 又因 $a+b=1$，故 $a=1$. 从而

$$f(x)=x^2+c.$$

设(x_0,y_0)在 $y=f(x)$的图象上，则点(x_0,y_0^2+1)在函数 $g(x)=f(f(x))$的图象上，即

$$y_0=x_0^2+c,$$

$$y_0^2+1=(x_0^2+c)^2+c.$$

故 $c=1$，于是可确定 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=(x^2+1)^2+1$.

(2) 由(1)可得

$$\begin{aligned}F(x)&=g(x)-\lambda f(x)\\&=x^4+(2-\lambda)x^2+2-\lambda.\end{aligned}$$

设任取 $x_1<x_2<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，有

$$F(x_2)-F(x_1)=(x_2^2-x_1^2)(x_2^2+x_1^2+2-\lambda).$$

要使 $F(x)$在$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$时为减函数，只需

$$x_2^2+x_1^2+2-\lambda>0,$$

注意到

$$x_1^2+x_2^2+2>3,$$

因此只需 $\lambda\leqslant 3$，$F(x)$在$(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})$内是减函数.

同理可知，当 $\lambda\geqslant 3$ 时，$F(x)$在$(-\frac{\sqrt{2}}{2},0)$内是增函数.

综上所述，存在惟一实数 $\lambda=3$ 满足题设要求.

例 8 设 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上以 2 为周期的函数. 对 $k\in Z$，用 I_k 表示区间$(2k-1,2k+1]$，已知当 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$.

(1) 求 $f(x)$在 I_k 上的解析式.

(2) 对自然数 k，求集合 $M_k=\{a|$使方程$f(x)=ax$ 在 I_k 上有两个不相等的实根$\}$.

解 (1)设 $x\in I_k$ 时，$2k-1<x\leqslant 2k+1$，从而

$$-1<x-2k\leqslant 1.$$

即
$$x-2k\in I_0.$$

因函数 $f(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上以 2 为周期的函数，且 $x\in I_0$ 时，$f(x)=x^2$，故

$$f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2.$$

(2) 构造函数

$$g(x)=(x-2k)^2-ax \quad (x\in(2k-1,2k+1]),$$

即 $g(x)=x^2-(4k+a)x+4k^2 \quad (x\in(2k-1,2k+1])$,

依题设，函数 $g(x)=0$ 有两个不相等的实数根，为此，只须满足

$$\begin{cases} g(2k-1)>0, \\ g(2k+1)\geqslant 0, \\ \Delta=(4k+a)^2-16k^2>0, \\ 2k-1<\dfrac{4k+a}{2}<2k+1. \end{cases}$$

解之，即得 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2k+1}$.

对于问题(2)，其几何意义是十分明显的，如图 6－8 所示，欲使直线 $y=ax$ 与抛物线段 $y=(x-2k)^2$ 有两个交点，只要注意到 $a=\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$即得 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2k+1}\right]$.

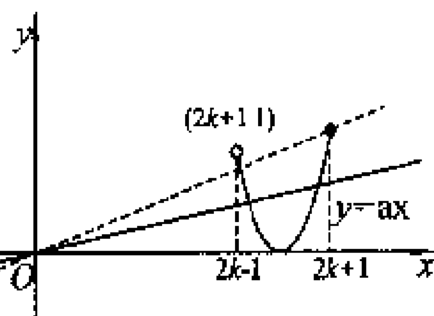


图 6－8

练 习 六

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{(2+x)(6-x)}$ （ ）.

(A)有最小值，没有最大值

(B)有最大值，没有最小值

(C)有最小值，也有最大值

(D)没有最小值，也没有最大值

2. 如图 6－9 是函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象，那么 (　　).

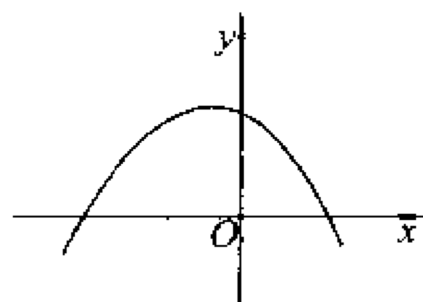


图 6－9

(A) $a<0,b<0,c>0$

(B) $a>0,b>0,c<0$

(C) $a<0,b>0,c>0$

(D) $a>0,b>0,c>0$

3. α,β 是方程 $x^2-2mx+3m-4=0$ 的两实根，则 $(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$ (　　).

(A) 有最小值，无最大值

(B) 有最大值，无最小值

(C) 既有最大值，又有最小值

(D) 既无最大值、又无最小值

4. 如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 满足 $f(1+x)=f(-x)$，那么 (　　).

(A) $f(-2)<f(0)<f(2)$　(B) $f(0)<f(-2)<f(2)$

(C) $f(0)<f(2)<f(-2)$　(D) $f(2)<f(0)<f(-2)$

二、填空题

5. 若 $f(x)=x^4+px^3+qx^2+x$ 对一切 $x\in\mathrm{R}$ 都有 $f(x)\geqslant x$，且 $f(1)=1$，则 p,q 的值分别为______.

6. 已知二次函数 $f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 2$ 上的最小值为 2，则 $a=$______.

7. 函数 $y=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 的值域为______.

8. 若关于 x 的二次方程 $7x^2-(p+13)x+p^2-p-2=0$ 的两根 α,β 满足 $0<\alpha<1<\beta<2$，则实数 p 的取值范围是______.

9. 函数 $f(x)=|x^2-a|$ 在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内最大值 $M(a)$ 的最小值是______.

三、解答题

10. 若 $a<b<c<d$,求证:对任意实数 $t\neq -1$,关于 x 的方程

$$(x-a)(x-c)+t(x-b)(x-d)=0$$

都有两个不等的实根.

11. 设 a,b,c 为实数,

$$g(x)=ax^2+bx+c,\quad |x|\leqslant 1.$$

求使下列条件同时满足的 a,b,c 的值.

(i) $g(\frac{1}{2})=381$;

(ii) $g(x)_{max}=444$;

(iii) $g(x)_{min}=364$.

12. 讨论方程 $f(x)=|(x-2)(x-4)|+|(x-4)(x-6)|+|2(x-2)(x-6)|=k$($k$ 为常数)实根的个数.

13. 设 $f(x)=a(x^2+2x+4)+3a(x^2+2x+4)+b$,已知它的最小值是 37,$f(-2)=57$.求 a,b.

14. 设函数

$$y=x^2+(a+1)^2+|x+a-1|$$

的最小值大于 3,求实数 a 的取值范围.

15. 奇函数 $y=f(x)(x\in\mathrm{R})$,当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x^2+2x$.当 $x\in[a,b]$时,函数 $y=f(x)$的取值范围为$[\frac{1}{b},\frac{1}{a}]$.试求 a,b 的值.

第七讲　指数函数和对数函数

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 指数函数

(1) 函数 $y=a^x$ 叫做 指数函数，其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$，其定义域是 R.

(2) 指数函数的图象和性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象		
性质	(i) $y>0$，图象在 x 轴上方 (ii) 当 $x=0$ 时，$y=1$，即图象过点 $(0,1)$.	
	(iii)当 $x>0$ 时，$y>1$，当 $x<0$ 时，$0<y<1$	(iii)当 $x>0$ 时，$0<y<1$ 当 $x<0$ 时，$y>1$
	(iv)在 R 上是增函数	(iv)在 R 上是减函数

(3) 熟练掌握几种典型函数的图象. 如图 7－1 所示，有利于掌握不同类型的指数函数间的异同，如对于函数 $f(x)=a^x$，当 $0<a<1$ 且 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$；对于函数 $g_1(x)=a_1{}^x$，$g_2(x)=a_2{}^x$，当 $a_1<a_2$ 且 $x>0$ 时，$g_1(x)<g_2(x)$，当 $g_1(x_1)=g_2(x_2)$ 且 $a_1, a_2\in(0,1)$ 或 $a_1, a_2\in(1,+\infty)$ 时均有 $x_1>x_2$.

(4) 指数相同、底数不同的两个幂大小的比较，注意利用幂函数的性质；底数相同、指数不同的两个幂大小的比较，则注意指数函数

的性质.

2. 对数

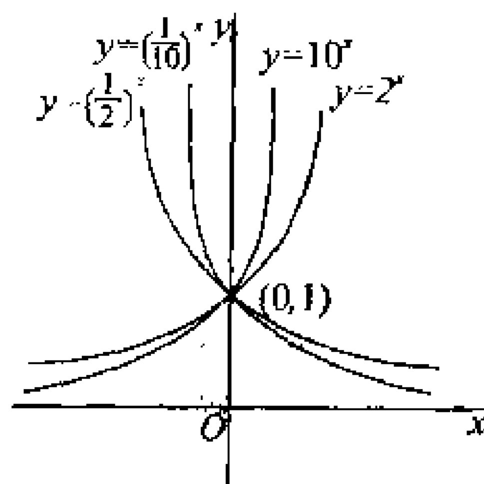


图 7-1

(1) 如果 $a(a>0, a\neq 1)$的 b 次幂等于 N,那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数,记作 $\log_a N=b$.其中 a 叫做底数,N 叫做真数,式子 $\log_a N$ 叫做对数式;底数为 10 的对数叫做常用对数,N 的常用对数简记为 $\lg N$.以 $e(=2.71828\cdots)$为底的对数称为自然对数,记作 $\ln N$.

(2) 对数恒等式:$a^{\log_a N}=N(a>0, a\neq 1, N>0)$.

(3) 对数式与指数式的互化:当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时,指数式 $a^b=N$ 可以写成对数式 $\log_a N=b$.反之,$\log_a N=b$ 可以写成 $a^b=N$.

(4) 对数的性质

(i) 负数和零没有对数;

(ii) 1 的对数是零,即 $\log_a 1=0$;

(iii) 底数的对数是 1,即 $\log_a a=1$,

(5) 对数的运算法则

(i) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$;

(ii) $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$;

(iii) $\log_a N^n=n\log_a N$,

(iv) $\log_a \sqrt[n]{N}=\frac{1}{n}\log_a N$.

(6) (i)对数换底公式是 $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}(a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, N>0)$

(ii) 利用对数换底公式可得以下常用等式:

$$\log_{a^n} b^n=\log_a b;\log_{\frac{1}{a}} M=-\log_a M;$$

$$\log_{a^m} M^n = \frac{n}{m}\log_a M;\ \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

其中各字母应能使等式两边对数式均有意义.

3. 对数函数

(1) 函数 $y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq 1$)叫做对数函数,对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.

(2) 对数函数的图象和性质

	$a>1$	$0<a<1$
图象	$y=\log_a x$ (O, 1, x, y)	$y=\log_a x$ (O, 1, x, y)
性质	(i) 定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$	
	(ii) 图象过点$(1,0)$.	
	(iii) 当 $0<x<1$ 时,$y<0$;当 $x>1$ 时,$y>0$.	(iii) 当 $0<x<1$ 时,$y>0$;当 $x>1$ 时,$y<0$.
	(iv) 在$(0,+\infty)$上是增函数	(iv) 在$(0,+\infty)$上是减函数

4. 指数方程和对数方程

(1) 在指数里含有未知数的方程叫做指数方程,在对数符号后面含有未知数的方程叫做对数方程.

(2) 指数方程和对数方程的基本类型及其解法如下表.

类型		解法
指数方程	$a^{f(x)}=c(a>0,a\neq 1,c>0$	化为对数式 $f(x)=log_a c$ 求解
	$a^{f(x)}=a^{g(x)}(a>0,a\neq 1)$	化为 $f(x)=g(x)$ 求解
	$a^{f(x)}=b^{g(x)}(a>0,a\neq 1,b>0,b\neq 1)$	两边取对数求解
	$a^{2f(x)}+b\cdot a^{f(x)}+c=0$	换元,化为一元二次方程求解
	求近似解的某些特殊方程	利用图象求两曲线交点的横坐标近似值
对数方程	$\log_a f(x)=c(a>0,a\neq 1)$	化为指数式 $f(x)=a^c(a>0,a\neq 1)$ 求解
	$\log_a f(x)=\log_a g(x)$	化为不等式组 $\begin{cases}f(x)>0\\g(x)>0\\f(x)=g(x)\end{cases}$ 求解
	$[\log_a f(x)]^2+b\log_a f(x)+c=0$	换元化为一元二次方程求解
	求近似解的某些特殊方程	利用图象求两曲线交点的横坐标近似值

例 题 精 讲

例1 已知 $a>0,a\neq 1$,试计算

$$\log_a\sqrt{3a+2\sqrt{2a^2}}+\log_a\sqrt{(3-\sqrt{8})a}.$$

解 因

$$\log_a\sqrt{3a+2\sqrt{2a^2}}=\log_a(\sqrt{a}\sqrt{3+2\sqrt{2}})$$

$$=\log_a[\sqrt{a}\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}]$$

$$=\frac{1}{2}+\log_a(\sqrt{2}+1),$$

$$\log_a\sqrt{(3-\sqrt{8})a}=\log_a(\sqrt{a}\sqrt{3-2\sqrt{2}})$$

$$=\log_a[\sqrt{a}(\sqrt{2}-1)]$$

$$=\frac{1}{2}+\log_a(\sqrt{2}-1),$$

所以,有

$$\text{原式} = \frac{1}{2} + \log_a(\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2} + \log_a(\sqrt{2}-1)$$

$$= 1 + \log_a[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)]$$

$$= 1 + \log_a 1 = 1.$$

例2 设 p,q 满足 $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q)$,求$\frac{q}{p}$.

解 令 $\log_9 p = \log_{12} q = \log_{16}(p+q) = t$,则

$$p = 9^t, q = 12^t, p + q = 16^t,$$

可见

$$9^t + 12^t = 16^t,$$

即

$$1 + (\frac{4}{3})^t = (\frac{16}{9})^t = (\frac{4}{3})^{2t}.$$

因为

$$\frac{q}{p} = (\frac{4}{3})^t,$$

所以

$$(\frac{q}{p})^2 - \frac{q}{p} - 1 = 0$$

解之,得$\frac{q}{p} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.由题设知 $p>0,q>0$,故$\frac{q}{p} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例3 对于正整数 $a,b,c(a \leqslant b \leqslant c)$和实数 x,y,z,w,若 $a^x = b^y = c^z = 70^w$,$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{w}$.求证:$a+b=c$.

证明 由 $a^x = b^y = c^z = 70^w$ 可得

$$a^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{x}}, b^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{y}}, c^{\frac{1}{w}} = 70^{\frac{1}{z}},$$

将上述各式相乘,即得

$$(abc)^{\frac{1}{w}} = 70^{(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})},$$

所以

$$abc = 70.$$

因 x,y,z,w 均为不等于零的实数,故 $a^x = b^y = c^z = 70^w \neq 1$,从而 a,b,c 均不为 1.注意到经质因数分解:

$$70 = 2 \times 5 \times 7.$$

依题设,有 $a \leqslant b \leqslant c$,故有且仅有 $a=2,b=5,c=7$.显见 $a+b=c$.

例 4 已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x(x>0)$ 和定义在 R 上的奇函数 $g(x)$. 当 $x>0$ 时,有 $g(x)=f(x)$,试求 $g(x)$ 的反函数.

解 因 $g(x)$ 是定义在 R 上的奇函数,故

$$g(-x)=-g(x),$$

取 $x=0$,即得 $g(0)=0$,从而 $g^{-1}(0)=0$.

当 $x>0$ 时,$f(x)=g(x)=(\frac{1}{2})^x$,其反函数为

$$g(x)^{-1}=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x \qquad (0<x<1).$$

当 $x<0$ 时,$-x>0$,于是

$$g(x)=-g(-x)=-f(-x)=-(\frac{1}{2})^{-x}=-2^x$$

其反函数

$$g^{-1}(x)=\log_2(-x) \qquad (-1<x<0).$$

综上所述,所求函数 $g(x)$ 的反函数为

$$g^{-1}(x)=\begin{cases}\log_2(-x) & (-1<x<0);\\ 0 & x=0;\\ -\log_2 x & (0<x<1).\end{cases}$$

例 5 设 $f(x)=\lg[1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]$,其中 a 是实数,n 是任意给定的自然数且 $n\geqslant 2$. 如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围.

分析 欲使函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1]$ 上有意义,须且只须

$$1+2^x+3^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a>0,$$

即

$$a>-[(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x]. \qquad ①$$

因函数 $y=a^x(0<a<1)$ 在定义域内是减函数,故当 $x\in(-\infty,1]$ 时,有

$$(\frac{1}{n})^x+(\frac{2}{n})^x+\cdots+(\frac{n-1}{n})^x$$

$$\geqslant \frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}=\frac{1}{2}(n-1). \qquad ②$$

由①,②知

$$a>-\frac{1}{2}(n-1),$$

即为所求.

例 6 在函数 $y=\log_a x(a>1,x>1)$ 的图象上有 A,B,C 三点,它们的横坐标分别为 $m,m+2,m+4$.若$\triangle ABC$ 的面积为 S,求 S 的值域.

分析 如图 7-2, A、B、C 在 x 轴上投影分别为 A_1、B_1、C_1. 四边形 AA_1B_1B, BB_1C_1C, AA_1C_1C 等均为梯形,通过面积割补可将$\triangle ABC$ 的面积表示为 m 的函数.由

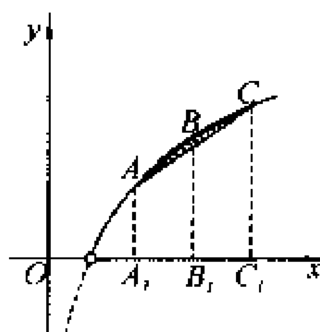


图 7-2

$$S_{AA_1B_1B}=\frac{1}{2}[\log_a m+\log_a(m+2)]\times 2$$

$$=\log_a m+\log_a(m+2),$$

$$S_{BB_1C_1C}=\frac{1}{2}[\log_a(m+2)+\log_a(m+4)]\times 2$$

$$=\log_a(m+2)+\log_a(m+4),$$

$$S_{AA_1C_1C}=\frac{1}{2}[\log_a m+\log_a(m+4)]\times 4$$

$$=2[\log_a m+\log_a(m+4)],$$

可得

$$S_{\triangle ABC}=S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}-S_{AA_1C_1C}$$

$$=[\log_a m+\log_a(m+2)]+[\log_a(m+2)+\log_a(m+4)]$$

$$-2[\log_a m+\log_a(m+4)]$$

$$=2\log_a(m+2)-[\log_a m+\log_a(m+4)]$$

$$= \log_a \frac{(m+2)^2}{m(m+4)}$$

$$= \log_a [1 + \frac{4}{m(m+4)}].$$

不难证明函数 $f(m) = \log_a [1 + \frac{4}{m(m+4)}] (a > 1)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上是减函数.故

$$\log_a 1 < f(m) < \log_a [1 + \frac{4}{1 \times (1+4)}] = \log_a \frac{9}{5},$$

即得△ABC 面积 S 的取值范围是 $(0, \log_a \frac{9}{5})$.

例 7 已知 $a > 1, m > p > 0$,且方程 $x + \log_a x = m$ 的解为 p,解方程 $x + a^x = m$.

分析 方程 $x + \log_a x = m$ 可变形为

$$\log_a x = -x + m, \qquad ①$$

而方程 $x + a^x = m$ 可变形为

$$a^x = -x + m. \qquad ②$$

如图 7-3,注意到方程①解是函数 $y = \log_a x$ 与函数 $y = -x + m$ 图象交点的横坐标,方程②解则是函数 $y = a^x$ 与函数 $y = -x + m$ 图象交点的横坐标,函数 $y = \log_a x$ 与函数 $y = a^x$ 互为反函数,必然有后一个交点的横坐标恰为前一个交点的纵坐标 $y = m - p$.即原方程的解为 $m - p$.

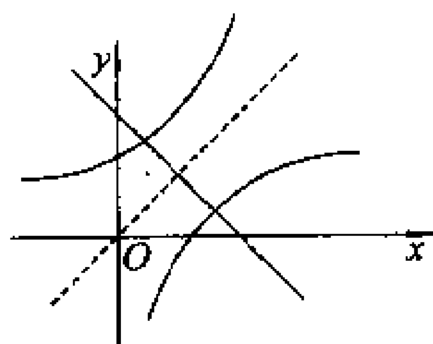


图 7-3

注 例 7 的解答巧妙地将数形结合,利用了函数图象的性质.

例 8 已知 $a > 0, a \neq 1$,试求使方程

$$\log_a (x - ak) = \log_{a^2} (x^2 - a^2) \quad ①$$

有解的 k 的取值范围.

解 方程等价于

$$\begin{cases} x - ak > 0, \\ x^2 - a^2 > 0, \\ (x - ak)^2 = x^2 - a^2, \end{cases}$$

即等价于

$$\begin{cases} x - ak > 0, & ② \\ 2kx = a(1 + k^2). & ③ \end{cases}$$

注意到 $a>0$,故

当 $k=0$ 时,方程③无解.

当 $k\neq0$ 时,方程③的解为

$$x = \frac{a(1+k^2)}{2k}. \quad ④$$

因式③满足式①,故

$$\frac{a(1+k^2)}{2k} - ak = \frac{a(1-k^2)}{2k} > 0.$$

即

$$k(k^2-1) < 0. \quad ⑤$$

由⑤知 k 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$.

注 本题还可以用数形结合、函数的思想求解:令 $y_1=(x-ak)^2$, $y_2=x^2-a^2$,分别作出其图象,交点的横坐标 x 即为方程 $(x-ak)^2=x^2-a^2$ 的解.这里 $y_1=(x-ak)^2$ 的顶点横坐标 ak 只有两种情况才能保证交点的横坐标 $x>ak$,这两种情况是 $ak<-a$ 和 $0<ak<a$,如图 7-4 所示.故 k 的取值范围是 $k<-1$ 或 $0<k<1(a>0)$.

例 9 当 a 为何值时,不等式

$$\log_{\frac{1}{a}}(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\log_a 3 \geqslant 0 \quad ①$$

有且只有一个解.

分析 ①等价于

$$\frac{\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)}{-\log_3 a}\cdot\log_5(x^2+ax+6)+\frac{1}{\log_3 a}\geqslant 0. \quad ②$$

(i) 当 $a>1$ 时,②式等价于

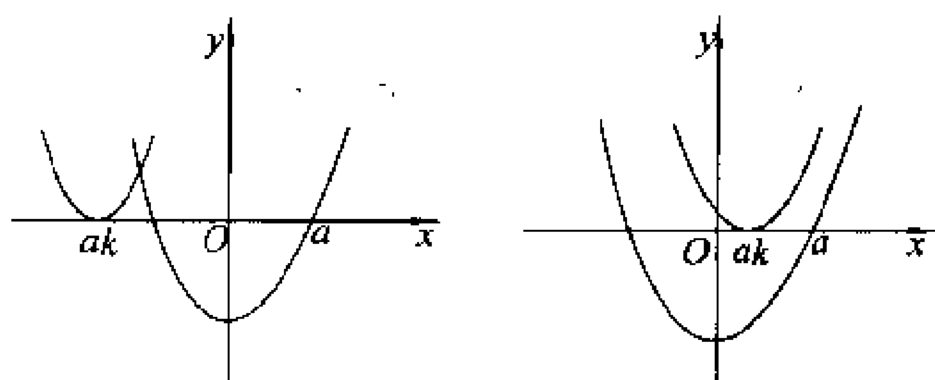


图 7－4

$$\log_3(\sqrt{x^2+ax+5}+1)\cdot\log_5(x^2+ax+6)\leqslant 1. \quad ③$$

换元,令 $u=x^2+ax+5$,则③可写为

$$\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1)\leqslant 1. \quad ④$$

观察④式左边结构特征,运用函数的思想构造函数

$$f(u)=\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1).$$

这是一个定义在$[0,+\infty]$上的增函数.注意到$f(4)=1$,故当$f(u)\leqslant 1$时,有且仅有$0\leqslant u\leqslant 4$,

即
$$0\leqslant x^2+ax+5\leqslant 4.$$

进而,当且仅当$x^2+ax+1=0$有惟一实数解时,①有且只有一个实数解.此时

$$\Delta=a^2-4=0.$$

解之得 $a=2,a=-2$(舍去).当 $a=2$ 时,$x=-1$.

(ii) 当$0<a<1$时,同上①式可写为

$$\log_3(\sqrt{u}+1)\cdot\log_5(u+1)\geqslant 1. \quad ⑤$$

类似(i),⑤等价于

$$x^2+ax+5\geqslant 4,$$

上述不等式有无穷多组实数解.

综上所述,$a=2$为所求.

练 习 七

一、选择题

1. 若 $a^{1995} < a^{1994} < a^{1996}$,则一定有 (　　).

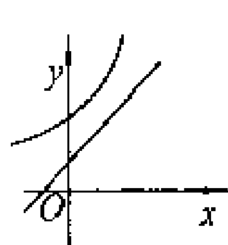
(A)$a > 1$　(B)$a < -1$　(C)$-1 < a < 0$　(D)$0 < a < 1$.

2. 已知 $x \in (-1,1)$,则函数 $f(x) = \lg\frac{1-x}{1+x}$是 (　　).

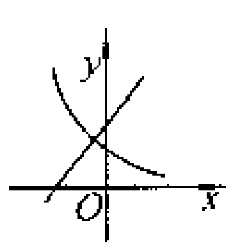
(A)单调递增的奇函数　(B)单调递减的奇函数

(C)单调递增的偶函数　(D)单调递减的偶函数

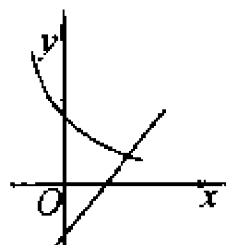
3. 函数 $y = x + a$ 与 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$的图象只可能是(　　).



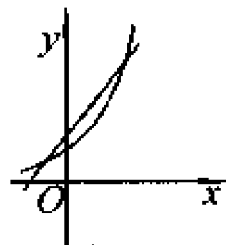
(A)



(B)



(C)



(D)

(第 3 题)

4. 方程 $\log_5 x \cdot \log_x 3 = \log_{25} 9$ 的解集是 (　　).

(A)$\{5\}$　(B)$\{3\}$　(C)$\{5,3\}$　(D)$\{x \mid x > 0$ 且 $x \neq 1\}$

5. 设 $1 < a < b < a^2$,则在 $2, \log_a b, \log_b a, \log_{ab} a^2$ 这四个数中,最大的和最小的数依次是 (　　).

(A)2 和 $\log_b a$　(B)2 和 $\log_{ab} a^2$

(C)$\log_a b$ 和 $\log_b a$　(D)$\log_a b$ 和 $\log_{ab} a^2$

6. 设函数 $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}}(x+1)\right|$,当 $-1 < a < b < c$ 时,有 $f(a) > f(c) > f(b)$,则 (　　).

(A)$ac < 0$　(B)$ab < 0$　(C)$ac > 0$　(D)$bc > 0$

二、填空题

7. 设$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.则$[g(x)]^2 - [f(x)]^2$

= ________.

8. 若 $2^x \cdot 3^y = 648, 3^x \cdot 2^y = 432$，则实数对 (x, y) 是________.

9. 已知指数函数 $f(x) = a^x$，二次函数 $\varphi(x) = x^2$. 满足 $f(a^2) > \varphi(a^a)$ 的 a 的取值范围为________.

10. 设 $f(x)$ 满足条件：ⅰ $f(x) = f(-x+4), x \in R$；ⅱ 当 $x > 2$ 时，$f(x)$ 为增函数，$a = f[1.1^{0.9}]$，$b = f[(\frac{9}{10})^{1.1}]$，$c = f(\log_{\frac{1}{2}} 16)$，则自小到大 a, b, c 的顺序是________.

11. 已知关于 x 的方程 $\log_2(x+3) - \log_4 x^2 = a$ 的解在区间 $(3, 4)$ 内，实数 a 的集合为________.

12. 方程 $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ 的解是________.

三、解答题

13. 判断下列函数的单调性：

$$f(x) = \frac{a^{x+1} + b^{x+1}}{a^x + b^x} \quad (a, b \in \mathrm{R}^+, a \neq b).$$

14. 对于函数 $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$，若 $f(\frac{a+b}{1+ab}) = 1$，$f(\frac{a-b}{1-ab}) = 2$，其中 $|a| < 1, |b| < 1$，求 $f(a)$ 和 $f(b)$ 的值.

15. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+1)$，并且当点 (x, y) 在 $f(x)$ 的图象上运动时，点 $(\frac{x}{3}, \frac{y}{2})$ 在 $y = g(x)$ 的图象上运动，求函数 $p(x) = g(x) - f(x)$ 的最大值.

16. 已知集合

$$A = \{y \mid y = \log_{\frac{2}{3}}(x-1), x > 2\},$$

$$B = \{z \mid z = \frac{m^2 x - 1}{mx + 1}, x > 2\},$$

$B \neq \varnothing, B \subseteq A$，求 m 的取值范围.

17. (1) 试画出由方程

$$\frac{\lg(6-x) + \lg(x-2) + \log_{\frac{1}{10}}(x-2)}{\lg 2y} = \frac{1}{2}$$

所确定的函数 $y=f(x)$ 的图象.

(2) 若函数 $y=ax+\frac{1}{2}$ 与 $y=f(x)$ 的图象恰有一个公共点,求 a 的取值范围.

第八讲　函数$[x]$与$\{x\}$

知识点和方法述要

函数$[x]$表示实数x的整数部分,即不超过x的最大整数.通常称$y=[x]$为取整函数,又称高斯函数.记$\{x\}=x-[x]$,$y=\{x\}$称为小数部分函数.

例如,$[4]=4$,$[5.6]=5$,$[-\pi]=-4$,$\{4.3\}=0.3$,$\{-2.4\}=0.6$(而非0.4).

显然,$y=[x]$的定义域是R,值域是Z,图象呈阶梯状(图8-1).

函数$y=\{x\}$的定义域为实数集,值域$0\leqslant\{x\}<1$,是周期为1的周期函数.其图象如图8-2.

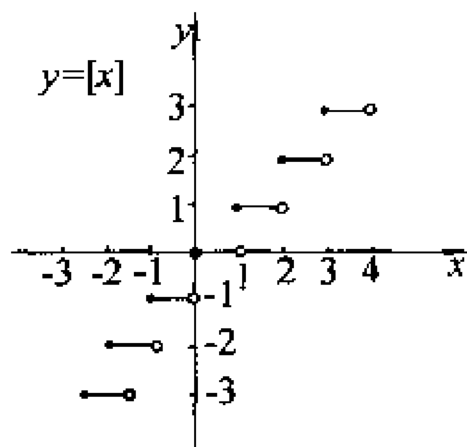


图8-1

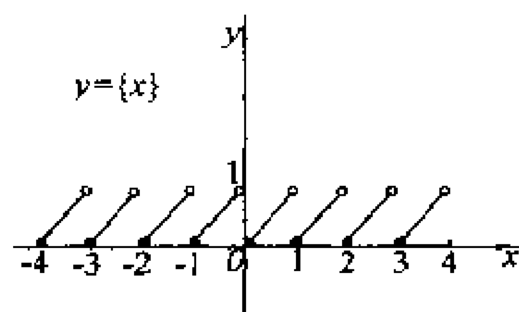


图8-2

2. 性质

(1) 函数$y=[x]$是一个分段表达的不减的无界函数,即当$x_1\leqslant x_2$时,有$[x_1]\leqslant[x_2]$.

(2) $[n+x]=n+[x]$,其中$n\in Z$.

证明　$[n+x]=[n+[x]+\{x\}]$.注意到$0\leqslant\{x\}<1$,则$[n+[x]+\{x\}]=[n+[x]]=n+[x]$,所以$[n+x]=n+[x]$.

(3) $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$.

(4) 若$[x]=[y]=n$,则 $x=n+a, y=n+b$,其中$0\leqslant a, b<1$.

(5) 对于一切实数 x, y 有$[x]+[y]\leqslant[x+y]$, $\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$.

证明 $x=[x]+\{x\}, y=[y]+\{y\}$,则

$$\begin{aligned}[x+y]&=[[x]+\{x\}+[y]+\{y\}]\\&=[[x]+[y]+\{x\}+\{y\}]\\&=[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]\\&\geqslant[x]+[y],\end{aligned}$$

又

$$x+y=[x]+\{x\}+[y]+\{y\},$$
$$x+y=[x+y]+\{x+y\},$$

故

$$[x+y]+\{x+y\}=[x]+[y]+\{x\}+\{y\},$$
$$0\leqslant[x+y]-([x]+[y])=\{x\}+\{y\}-\{x+y\},$$

知

$$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}.$$

(6) 若 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$,则$[xy]\geqslant[x][y]$.

(7) $[-x]=\begin{cases}-[x], & x\in Z,\\ -[x]-1, & x\notin Z;\end{cases}$

$$\{-x\}=\begin{cases}-\{x\}=0, & x\in Z,\\ 1-\{x\}, & x\notin Z.\end{cases}$$

(8) 若 $n\in N$,则$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$;当 $n=1$ 时,$[[x]]=[x]$.

证明 $\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant\frac{x}{n}<\left[\frac{x}{n}\right]+1$,则

$$n\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant x<n\left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right).$$

注意 $n\left[\frac{x}{n}\right]$与 $n\left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right)$都是整数,则

$$n\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant[x]<n\left(\left[\frac{x}{n}\right]+1\right),$$

知

$$\left[\frac{x}{n}\right]\leqslant\frac{[x]}{n}<\left[\frac{x}{n}\right]+1.$$

有$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$成立.

(9) 若整数 a,b 适合 $a=bq+r(b>0,q,r$ 是整数,$0\leqslant r<b)$,则$\left[\frac{a}{b}\right]=q$.

(10) x 是正实数,n 是正整数,则在不超过 x 的正整数中,n 的倍数共有$\left[\frac{x}{n}\right]$个.

(11) 在 $n!$ 的质因数分解式中,质数 p 的指数是

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots.$$

证明 $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$是个有限的和,因为当 $p^k>n$ 时,$\left[\frac{n}{p^k}\right]=0$,知以后各项均为 0,所以它是一个有限和.

因为 p 为质数,所以 $n!$ 中共有$\left[\frac{n}{p}\right]$个数是 p 的倍数;注意,在这些 p 的倍数中有$\left[\frac{n}{p^2}\right]$个是 p^2 的倍数;在这些 p^2 的倍数中有$\left[\frac{n}{p^3}\right]$个是 p^3 的倍数……所以 $n!$ 中质数因子 p 的个数是

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

所以 $n!$ 的质因数分解式中,质因数 p 的指数是

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

例 题 精 讲

例 1 解方程 $x^2-8[x]+7=0$.

解 设$[x]=n$,则

$$x^2+7=8n, \qquad ①$$

可知 $n>0$.由于 $n\leqslant x<n+1$,因此

$$n^2+7 \leqslant x^2+7 < (n+1)^2+7. \qquad ②$$

由①,②得

$$n^2+7 \leqslant 8n < (n+1)^2+7 = n^2+2n+8.$$

解得 $1 \leqslant n < 2, 4 < n \leqslant 7$,故 $n=1,5,6,7$.代入①,得 $x^2=1,33,41,49$.经检验知,$x=1,\sqrt{33},\sqrt{41},7$ 是原方程的解.

例 2 解方程 $x+4\{x\}=2[x]$.

解 因为 $x=[x]+\{x\}$,则

$$[x]+\{x\}+4\{x\}=2[x],$$

即

$$\{x\}=\frac{[x]}{5}.$$

因 $0 \leqslant \{x\} < 1$,故 $0 \leqslant \frac{[x]}{5} < 1, 0 \leqslant [x] < 5$,可知 $[x]=0,1,2,3,4$,且

$$x=[x]+\{x\}=[x]+\frac{[x]}{5}=\frac{6}{5}[x],$$

即得方程有 5 个解 $x_1=0, x_2=1.2, x_3=2.4, x_4=3.6, x_5=4.8$.经检验知它们都是方程的解.

例 3 计算和式 $\sum\limits_{n=1}^{100}\left[\frac{23n}{101}\right]$的值.

解 依题设,对于 $n=1,2,\cdots,100, \frac{23n}{101} \notin Z$,而

$$\frac{23n}{101}+\frac{23(101-n)}{101}=23,$$

则

$$\left\{\frac{23n}{101}\right\}+\left\{\frac{23(101-n)}{101}\right\}=1, \left[\frac{23n}{101}\right]+\left[\frac{23(101-n)}{101}\right]=22.$$

又

$$\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{23n}{101}\right]=\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{23(101-n)}{101}\right],$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}\left[\frac{23n}{101}\right]&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{100}\left(\left[\frac{23n}{101}\right]+\left[\frac{23(101-n)}{101}\right]\right),\\&=\frac{1}{2}\times 22\times 100\\&=1100.\end{aligned}$$

例 4 设 n 为一正整数,则在区间 $[1,n)$ 内有多少个实数 x,满足方程

$$x^3-[x^3]=(x-[x])^3. \qquad ①$$

解 设 $x=m+r$,其中 $m=[x]$, $r=\{x\}$. 则 $1\leqslant m\leqslant n-1, 0\leqslant r<1$. 代入①,得

$$(m+r)^3-[(m+r)^3]=(m+r-[m+r])^3,$$

即
$$m^3+3m^2r+3mr^2=[(m+r)^3]. \qquad ②$$

②说明 $m^3+3m^2r+3mr^2$ 是一个整数. 当 r 从 0 增大到 1 时, $m^3+3m^2r+3mr^2$ 从 m^3 增大到 m^3+3m^2+3m. 即

$$m^3\leqslant m^3+3m^2r+3mr^2<m^3+3m^2+3m,$$

所以,对于 $0\leqslant r<1$, $m^3+3m^2r+3mr^2$ 可以取

$$m^3+3m^2+3m-m^3=(m+1)^3-m^3-1$$

个整数值.

由于 $1\leqslant m\leqslant n-1$,所以,满足原方程的 x 的个数为

$$\sum_{m=1}^{n-1}[(m+1)^3-m^3-1]=n^3-1-(n-1)$$
$$=n^3-n.$$

例 5 对于任意 $n\in \mathrm{N}(n>1)$,试证明:

$$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=[\log_2 n]+[\log_3 n]+\cdots+[\log_n n].$$

分析 首先考察等式右端,其形式启发我们设 $2^{k_2}\leqslant n<2^{k_2+1}$, $3^{k_3}\leqslant n<3^{k_3+1}$, $\cdots$, $n^{k_n}\leqslant n<n^{k_n+1}$ $(k_2,k_3,\cdots,k_n\in N)$,于是等式右端 $=k_2+k_3+\cdots+k_n$.

再研究等式左端,作集合 $A_m=\{1,2,\cdots,[\sqrt[m]{n}]\}(m=2,3,\cdots,n)$,易见 A_m 中有 $[\sqrt[m]{n}]$ 个元素.

因为 $1\in A_m(m=2,3,\cdots,n)$,所以 1 在所有 A_m 中共出现了 $n-1$ 次;又 $2\in A_m(m=2,3,\cdots,k_2)$,即 2 在这些集合中出现了 k_2-1 次;$\cdots$;n 在这些集合中出现了 k_n-1 次,这样, $A_2,A_3,\cdots,A_n$ 的元素个数之和是

$$(n-1)+(k_2-1)+\cdots(k_n-1)=k_2+k_3+\cdots+k_n$$

即
$$[\sqrt{n}]+[\sqrt[3]{n}]+\cdots+[\sqrt[n]{n}]=k_2+k_3+\cdots+k_n.$$

故原式成立.

例 6 求所有的 $a,b\in\mathbf{N}$,使

$$[\frac{a^2}{b}]+[\frac{b^2}{a}]=[\frac{a^2+b^2}{ab}]+ab. \quad ①$$

解 不妨设 $a\geqslant b$,则

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\geqslant[\frac{a^2}{b}]+[\frac{b^2}{a}]=[\frac{a^2+b^2}{ab}]+ab\geqslant 2+ab.$$

即
$$(\frac{a^2}{b}-1)(\frac{b^2}{a}-1)+1\leqslant 0.$$

因$\frac{a^2}{b}\geqslant 1$,故$\frac{b^2}{a}<1$,即 $a>b^2$,$[\frac{b^2}{a}]=0$.

设 $a=kb+r(k\in\mathbf{N},0\leqslant r\leqslant b-1)$,则 $k\geqslant b$,①式变为

$$k^2b+2kr+[\frac{r^2}{b}]=k+kb^2+rb+[\frac{b}{a}+\frac{r}{b}]. \quad ②$$

因$\frac{b}{a}+\frac{r}{b}<\frac{1}{b}+\frac{r}{b}\leqslant 1$,所以

$$[\frac{b}{a}+\frac{r}{b}]=0. \quad ③$$

由②,③得

$$k^2b+2kr+[\frac{r^2}{b}]=k+kb^2+rb. \quad ④$$

若 $r=0$,则 $k=b+\frac{1}{b}$,有 $b=1,k=2,a=2$.

若 $r\geqslant 1$,则 $b\geqslant 2$,且

$$k^2b+2kr\geqslant kb^2+br+kr\geqslant kb^2+br+k. \quad ⑤$$

由④,⑤得

$$k^2b+2kr=kb^2+br+k.$$

此时唯有 $k=b,r=1$,且$[\frac{r^2}{b}]=0$,即 $a=b^2+1(b\geqslant 2)$.

由上述知满足要求的(a,b)为(n,n^2+1)和$(n^2+1,n)n\in\mathbf{N}$.

例 7 对自然数 n 及一切实数 x,求证:

$$[x]+[x+\frac{1}{n}]+[x+\frac{2}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx].$$

分析一 根据实数及有理数的性质知,必存在一个不大于 n 的正整数 r,使得 $[x]+\frac{r-1}{n}\leqslant x<[x]+\frac{r}{n}$.于是,有

$$([x]+[x+\frac{1}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-r}{n}])+([x+\frac{n-r+1}{n}]$$
$$+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}])$$
$$=(n-r+1)[x]+(r-1)([x]+1)$$
$$=n[x]+r-1.$$

又 $n[x]+r-1\leqslant nx<n[x]+r$,则 $[nx]=n[x]+r-1$,故等式成立.

分析二 作函数

$$f(x)=[nx]-[x]-[x+\frac{1}{n}]-[x+\frac{2}{n}]-\cdots-[x+\frac{n-1}{n}],$$

则 $$f(x+\frac{1}{n})=[nx]+1-[x+\frac{1}{n}]-[x+\frac{2}{n}]-\cdots-[x+\frac{n-1}{n}]$$
$$-[x]-1=f(x)$$

即 $f(x)$ 是以 $\frac{1}{n}$ 为周期的周期函数.所以我们仅需证明 $x\in[0,\frac{1}{n})$ 时,$f(x)=0$.

根据函数 $[x]$ 的定义,显然 $f(x)=0,x\in[0,\frac{1}{n})$.故由 $f(x)$ 的周期性知,对一切 $x\in\mathrm{R}$,恒有 $f(x)=0$,即等式成立.

例 8 在整数列 $[\frac{1^2}{1980}],[\frac{2^2}{1980}],\cdots,[\frac{1980^2}{1980}]$ 中,含有多少个互不相同的非负整数?

分析 虽然这个数列中共有 1980 个非负整数,但是其中有不少非负整数是重复出现的,比如前 44 个数 $[\frac{1^2}{1980}],[\frac{2^2}{1980}],\cdots,[\frac{44^2}{1980}]$

$=[\frac{1936}{1980}]$都等于0,所以要求出互不相同的非负整数,必须研究$(k+1)^2-k^2=2k+1$与1980的关系.易知,若$2k+1\geqslant 1980$,则$[\frac{(k+1)^2}{1980}]$与$[\frac{k^2}{1980}]$必不相等.换句话说,$k\geqslant 990$时,$[\frac{990^2}{1980}]$,$[\frac{991^2}{1980}]$,$\cdots$,$[\frac{1980^2}{1980}]$这$1980-990+1=991$个数必互不相同.

再看$[\frac{1^2}{1980}]$,$[\frac{2^2}{1980}]$,$\cdots$,$[\frac{989^2}{1980}]$,$[\frac{990^2}{1980}]$这990个数.这里$(k+1)^2-k^2=2k+1$,其中$1\leqslant k\leqslant 989$.所以$2k+1<1980$,则数列中任意相邻的两项,或都相等,或者后项比前项大1,但不会出现后项比前项大2及2以上的数,即这990个数是$0,1,2,\cdots,[\frac{990^2}{1980}]=495$这496个数.

所以整个数列中不相同的非负整数一共有$991+496-1=1486$个(注意$[\frac{990^2}{1980}]$数了两次).

例9 设x,y是正无理数,$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,则数列$[x],[2x],\cdots,[nx],\cdots$和$[y],[2y],\cdots,[ny],\cdots$包含了一切正整数,且每个正整数仅在其中一个数列中出现一次.

证明 首先,这两个数列都是严格单调递增的.事实上,由于$x>1$,$[x]\geqslant 1$,所以

$$[(n+1)x]\geqslant[nx]+[x]>[nx].$$

因此,任何一正整数n不应在数列$[x],[2x],\cdots,[nx],\cdots$中出现两次.同样也不会在$[y],[2y],\cdots,[ny],\cdots$中出现两次.

其次,这两个数列中无重复的数.否则的话,存在正整数a,b,m使得

$$[ax]=[by]=m.$$

由于x,y是无理数,因此

$$m<ax<m+1,m<by<m+1.$$

所以

$$m = m\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{m}{x} + \frac{m}{y}$$

$$< a + b < \frac{m+1}{x} + \frac{m+1}{y} = m + 1.$$

这表明 $a+b$ 是两个自然数 m 与 $m+1$ 之间的整数，与 $a+b$ 是正整数矛盾.

最后，证明对任意正整数 m，一定在其中的一个数列中出现. 若不然，存在正整数 u,v，使得

$$ux < m < m + 1 < (u+1)x,$$

$$vy < m < m + 1 < (v+1)y,$$

从而

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{m} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

$$< \frac{u+1}{m+1} + \frac{v+1}{m+1},$$

所以

$$u + v < m,$$

$$m + 1 < u + v + 2,$$

即

$$u + v < m < m + 1 < u + v + 2.$$

这是不可能的.

综上所述，知命题成立.

例 10 已知一个长方形盒子，可用单位立方体填满. 如果改放尽可能多的体积为两个单位的立方体，而且其棱与盒子的棱平行，则盒子的容积恰被填满 40%，试求出具有此种性质的长方形盒子的大小($\sqrt[3]{2} = 1.2599$).

分析 设 Q 为一具有所要求性质的长方形盒子，$a \leqslant b \leqslant c$ 为符合条件的 Q 的棱长. 由于这个长方箱内可填满单位立方体，故 a,b,c 均为自然数，现在放入体积为 2 的立方体，它的棱长为$\sqrt[3]{2}$，故 $a \geqslant 2$.

我们知道，在长度为 n 的线段上用$\sqrt[3]{2}$的线段去量，只能量$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$次，多余的部分不足$\sqrt[3]{2}$. 因此，这个盒子内共可放入

$$\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]$$

个体积为 2 的立方体，由于其体积为 abc 的 40%，则得

$$2\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right] = 0.4abc,$$

所以

$$\frac{a}{\left[\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{b}{\left[\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right]} \cdot \frac{c}{\left[\frac{c}{\sqrt[3]{2}}\right]} = 5.$$

为求适合上式自然数 a,b,c，可先考虑函数

$$g(n) = \frac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} (n \geqslant 2).$$

列表如下：

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]$	1	2	3	3	4	5	6	7	7	…
$g(n)$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{10}{7}$	…

上表中 $n \leqslant 10$ 的函数值 $g(n)$ 是通过具体计算得到的. 而对于 $n > 10$ 的估计可按下述方法进行：

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]}{n} &= \frac{\frac{n}{\sqrt[3]{2}} - \left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\}}{n} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\} \\
&> 0.79 - \frac{1}{n}\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right\} \\
&> 0.79 - \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

$$= 0.69 > \frac{2}{3},$$

所以$\dfrac{n}{\left[\frac{n}{\sqrt[3]{2}}\right]} < \dfrac{3}{2}$，即当 $n > 10$ 的情况下 $g(n) < \dfrac{3}{2}$.

利用上表可知 $a = 2$. 因为若 $a > 2$，则

$$g(a)g(b)g(c) \leqslant \left(\frac{5}{3}\right)^3 = \frac{125}{27} < 5,$$

这与 $g(a)g(b)g(c) = 5$ 矛盾.

因为 $a = 2$，所以 $g(b)g(c) = \dfrac{5}{2}$. 于是可推出 $g(b)$和 $g(c)$中至少有一个大于$\dfrac{3}{2}$，因此不外有以下两种情况：

(ⅰ) $g(b) = 2, g(c) = \dfrac{5}{4}$；

(ⅱ) $g(b) = \dfrac{5}{3}, g(c) = \dfrac{3}{2}$(或 $g(b) = \dfrac{3}{2}, g(c) = \dfrac{5}{3}$).

但 $g(n) > \dfrac{n}{\frac{n}{\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2} > 1.25$. 所以(ⅰ)不可能. 而由(ⅱ)给出 $b = 5, c = 6$ 或 $b = 3, c = 5$. 故$(2,5,6)$，$(2,3,5)$为所求.

练 习 八

一、填空题

1. 方程 $5x + 2[x] - 31 = 0$ 的解为________.
2. 方程 $4x^2 - 40[x] + 51 = 0$ 的实数解的个数为________.
3. 方程 $3x^3 - [x] = 3$ 的解为________.
4. 方程$\left[\dfrac{x+1}{4}\right] = \left[\dfrac{x-1}{2}\right]$的解集为________.
5. 满足$\left[\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}\right] = 2$ 的正整数 n 的集合是________.

二、解答题

6. 对任意实数 x,y,求证

$$[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y].$$

7. 求方程

$$\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}+\cdots+[\sqrt[3]{x^3-1}]=400$$

的正整数解.

8. 证明:对任意 $n\in\mathrm{N}$,有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+2}].$$

9. 设 n 是自然数,且 $n\geqslant3$,求证

$$\left\{\frac{n(n+1)}{4n-2}\right\}>\left\{\frac{n+1}{4}\right\}.$$

10. 解方程

$$1-|x+1|=\frac{[x]-x}{|x-1|}.$$

11. (1) 找出一个实数 x,满足 $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$;

(2) 证明:满足上述等式的 x 都不是有理数.

12. 前 1000 个正整数中可以表示成 $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ 的正整数有多少个?

13. 试证:方程

$$[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]=12345$$

没有实数解.

第九讲 三角函数与反三角函数

知识点和方法述要

1. (1)按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角.一条射线没有任何旋转时,也认为这时形成了一个角,并把这个角叫做零角,当 $\alpha=0°$时,可称角 α 为零角.角的概念推广后,它包括任意大小的正角、负角和零角.

(2) 角的始边在 x 轴的正半轴上,角的终边在第几象限,就说这个角是第几象限的角,或者说这个角属于第几象限.如果角的终边在坐标轴上,就称该角为非象限角.

2. (1) 规定:等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角,并规定:正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零,任一已知角 α 的弧度数的绝对值

$$|\alpha|=\frac{l}{r},$$

其中 l 为以角 α 作圆心角时所对的圆弧长,r 为圆的半径.这种用"弧度"做单位来度量角度的制度叫做弧度制.

(2) 弧度制来度量角,实际上是在角的集合与实数集 R 之间建立了一一对应关系.

(3) 角度制与弧度制的换算:

$$180°=\pi\text{弧度},$$

$$1°=\frac{\pi\text{弧度}}{180}\approx 0.01745\text{弧度},$$

$$1\text{弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'.$$

(4) 如果扇形圆心角用弧度 α 来表示,那么扇形弧长

$$l=|\alpha|\cdot r,$$

扇形的面积 $$S=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2,$$

其中 r 为扇形半径长.

3.（1）任意角三角函数的定义：设 α 是一个任意大小的角.角的终边上任意一点 $p(x,y)$，它与原点的距离是 $r(r>0)$.那么角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别是

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x};\qquad \cot\alpha=\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x};\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割分别以实数弧度制为自变量的函数，统称三角函数.

（2）同角三角函数的基本关系式：

ⅰ 倒数关系：

$$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;$$
$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;$$
$$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1.$$

ⅱ 商数关系：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

ⅲ 平方关系：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$
$$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha;$$
$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha.$$

上面这些关系式，我们都称之为恒等式，即当 α 取使关系式两边都有意义的任意值时，关系式两边的值都相等，以后所说的恒等式都是指这个意义下的恒等式.

(3) 八个基本关系式十分重要，应用广泛，主要用于：

(i) 已知某角的一个三角函数值，求它的其余各三角函数值，根据一个角的某个三角函数值，利用平方关系式求这个角的其他三角函数值时，一般要进行分类讨论，而这种分类讨论又取决于开方运算时的符号.

(ii) 化简三角函数式，化简的一般要求是：①尽量使函数的种类最少，项数最少，次数最低；②尽量使分母不含三角函数式；③根号内的三角函数式尽量开出来；④能求得数值的应计算出来.

(iii) 三角恒等式的证明，由繁到简是三角恒等式证明的一种策略，其本质是化简. 证明三角恒等式常从较繁一边变换到较简一边，若左右两边都较繁，则可分别从两边向相同的结果，即“左右归一”.

(4) $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\csc\alpha\cdot\sin\alpha=\sec\alpha\cdot\cos\alpha=\sec^2\alpha-\tan^2\alpha=\csc^2\alpha-\cot^2\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=\tan\frac{\pi}{4}=\cdots$. 审时度势，适当变换“1”，可以退为进，便利问题解决.

4. 七组诱导公式可归结为：$\frac{k\pi}{2}\pm\alpha(k\in Z)$的三角函数值“奇变偶不变，符号看象限”，即 k 为奇数时的三角函数值等于α 的异名(正弦与余弦互换，正切与余切互换)函数值，前面加上把 α 看成锐角时原函数值的符号，k 为偶数时的三角函数值等于α 的同名函数值，前面加上把 α 看成锐角时原函数值的符号.

5. (1) 三角函数图象的作法一般有两种. 一种是列表描点法，另一种是几何法(利用函数线). 后者比较精确，但作图较难，在实际画三角函数图象时，主要采用一种近似的描点法——五点法.

(2) 正弦函数、余弦函数的图象和性质如下表.

	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图象		
定义域	R	R
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
周期	2π	2π
奇偶性	奇	偶
单调性	$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)\uparrow$ $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in Z)\downarrow$	$[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in Z)\uparrow$ $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in Z)\downarrow$

(3) 通常三角函数的周期即指最小正周期.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$(其中 A,ω,φ 为常数,$A\neq 0,\omega\neq 0$)的周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$.这说明,影响上述两类三角函数周期的仅是自变量 x 的系数.

在函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+k$ 中含有四个常量A,ω,φ 和k,其中 A 与 ω 确定函数的形状,φ 与 k 确定图象与坐标轴的位置关系.

$$y=\sin x\longrightarrow y=\sin x+k$$

(上下平移);

$$y=\sin x\longrightarrow y=\sin(x+\varphi)$$

(左右平移,相位变换);

$$y=\sin x\longrightarrow y=\sin\omega x$$

(伸缩横坐标,周期变换);

$$y = \sin x \longrightarrow y = A\sin x$$

（伸缩纵坐标，振幅变换）；

一般地，函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)(A>0, \omega>0)(x \in \mathrm{R})$ 的图象可看作用下面的方法得到：先把 $y=\sin x$ 的图象上所有的点向左（$\varphi>0$）或向右（$\varphi<0$）平移 $|\varphi|$ 个单位．再把所有各点的横坐标缩短（$\omega>1$）或伸长（$0<\omega<1$）到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍（纵坐标不变），再把所得的各点的纵坐标伸长（$A>1$）或缩短（$0<A<1$）为原来的 A 倍（横坐标不变）．

（4）（ⅰ）正切函数、余切函数的图象和性质．

	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图象		
定义域	$\left\{x \middle\vert x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathrm{Z}\right\}$	$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}\}$
值域	R	R
周期	π	π
奇偶性	奇	奇
单调性	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k \in \mathrm{Z}) \uparrow$	$(k\pi, (k+1)\pi)\ k \in \mathrm{Z}) \downarrow$

（ⅱ）正切函数图象和余切函数图象都是不连续的，正切函数、余切函数在整个定义域上不是单调函数．

6．（1）定义：函数 $y=\sin x\left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的反函数叫做反正弦函数，记作 $y=\arcsin x$．函数 $y=\cos x(x \in [0,\pi])$ 的反函数叫做反

余弦函数，记作 $y=\arccos x$. 函数 $y=\tan x$（$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$）的反函数叫做反正切函数，记作 $y=\arctan x$. 函数 $y=\cot x$（$x\in(0,\pi)$）的反函数叫做反余切函数，记作 $y=\arctan x$.

$y=\arcsin x(|x|\leqslant 1)$ 并不是函数 $y=\sin x$ 的反函数，而是 $y=\sin x, x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的反函数，其他类似.

（2）反正弦函数、反余弦函数、反正切函数、反余切函数的图象和性质如下表：

	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\text{arccot}\, x$
定义域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R	R
值　域	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$[0,\pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\pi)$
单调性	增函数	减函数	增函数	减函数
奇偶性	奇 $\arcsin(-x)=-\arcsin x$	非奇非偶 $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$	奇 $\arctan(-x)=-\arctan x$	非奇非偶 $\text{arccot}(-x)=\pi-\text{arccot}\, x$
图　像				

（3）对定义域内一个取值 x，符号 $\arccos x$, $\arcsin x$, $\arctan x$, $\text{arccot}\, x$ 均表示一个某特定范围内的角，对于它们的同角关系式，根号前的符号则是惟一确定的. 如 $\arcsin x$ 是属于特定区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 的一个确定的角（弧度数），这个角的正弦恰好等于 x，即

$$x\in[-1,1],$$

$$\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],$$

$$\sin(\arcsin x)=x.$$

为表述简便起见常采用“设 $\arcsin x=\alpha,\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，得到 $\sin\alpha=x$”的形式，根据同角关系式又有

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(x\neq\pm 1),$$

其他类似.有关它们的和、差、倍、半角的三角函数运算中常通过换元，简化结构，但其间须重视原来角的特定范围，这是解题过程中不容忽视的重要条件，关于反三角等式的证明，还常采取两个步骤：①证两角的某同名三角函数值相同；②两角属于该三角函数的同一单调区间内，在反三角函数的变换中还常常遇到诱导公式的灵活运用.

7. 最简三角方程

方程		方程的解集
$\sin x=\alpha$	$\lvert\alpha\rvert>1$	$\varnothing$
	$\alpha=1$	$\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad k\in \mathbf{Z}\right\}$
	$\alpha=-1$	$\left\{x \mid x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}\quad k\in \mathbf{Z}\right\}$
	$\lvert\alpha\rvert<1$	$\{x \mid x=k\pi+(-1)^k\arcsin\alpha\quad k\in \mathbf{Z}\}$
$\cos x=\alpha$	$\lvert\alpha\rvert>1$	$\varnothing$
	$\alpha=1$	$\{x \mid x=2k\pi\quad k\in \mathbf{Z}\}$
	$\alpha=-1$	$\{x \mid x=(2k+1)\pi\quad k\in \mathbf{Z}\}$
	$\lvert\alpha\rvert<1$	$\{x \mid x=2k\pi\pm\arccos\alpha\quad k\in \mathbf{Z}\}$
$\tan x=\alpha$		$\{x \mid x=k\pi+\arctan\alpha\quad k\in \mathbf{Z}\}$
$\cot x=\alpha$		$\{x \mid x=k\pi+\operatorname{arccot}\alpha\quad k\in Z\}$

8. 数形结合，定性画图.图示法是研究三角函数和反三角函数的一种极为常见的思想方法.

例 题 精 讲

例 1 (1) 已知函数 $H(x)=\begin{cases}1 & (x>0),\\ -1 & (x\leqslant 0).\end{cases}$
试作出 $y=H(\sin x)$的图象.

(2) 设函数 $M(x)=\begin{cases}0 & (x\leqslant 0),\\ 1 & (x>0),\end{cases}$
试作函数 $y=M(\arcsin(\sin x))$的图象.

(3) 试作函数 $y=\arcsin(\sin x)$的图象.

解 (1) 依题设,函数

$$y=H(\sin x)=\begin{cases}1 & x\in(2k\pi,(2k+1)\pi)\\ -1 & x\in[(2k-1)\pi,2k\pi]\end{cases}(k\in Z),$$

其图象如图 9-1.

(2) 当 $x\in[-1,0]$时, $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2},0]$. 当 $x\in(0,1]$时,
$\arcsin x\in(0,\frac{\pi}{2}]$,故 $y=M(\arcsin x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,0],\\ 1 & x\in(0,1].\end{cases}$
其图象如图 9-2.

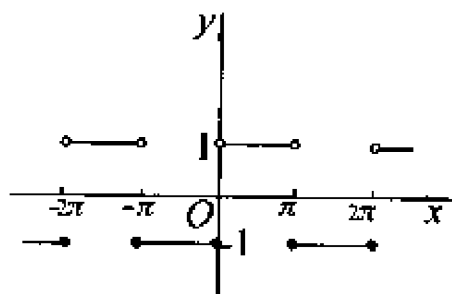


图 9-1

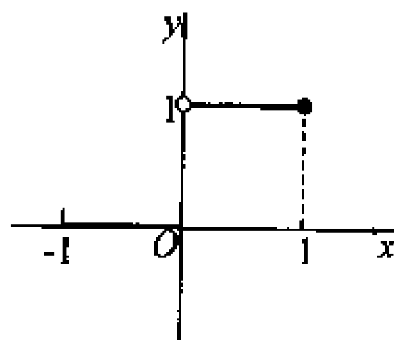


图 9-2

(3) 函数 $y=\arcsin(\sin x)$是以 2π 为周期的函数. 显然它也是奇函数. 现只需讨论在$[0,\pi]$上函数的图象:

当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时,

$y=\arcsin(\sin x)=x$,

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$时,

$y=\arcsin(\sin x)=\pi-x$,

根据上述性质,作出图 9-3.

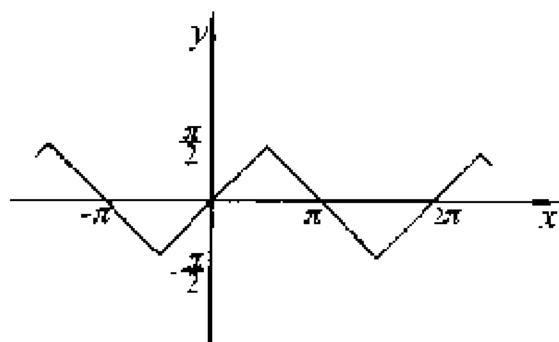


图 9-3

例 2 已知 $a>0,b>0$,求证:$ab\leqslant(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}$.

证明 因 $a>0,b>0$,故

$$(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)$$
$$\leqslant[\frac{(a\sin^2x+b\cos^2x)+(a\cos^2x+b\sin^2x)}{2}]^2$$
$$=\frac{(a+b)^2}{4},$$

又
$$(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)-ab$$
$$=(a\sin^2x+b\cos^2x)(a\cos^2x+b\sin^2x)$$
$$-ab(\sin^2x+\cos^2x)^2$$
$$=(a-b)^2\sin^2x\cos^2x\geqslant 0,$$

故不等式成立.

例 3 图 9-4 是函数

$$y=A\sin(\frac{2\pi}{3}x+\varphi)-1$$

的图象的一部分.求 A,φ,a 的值.这里 $A>0,\varphi\in[0,2\pi)$.

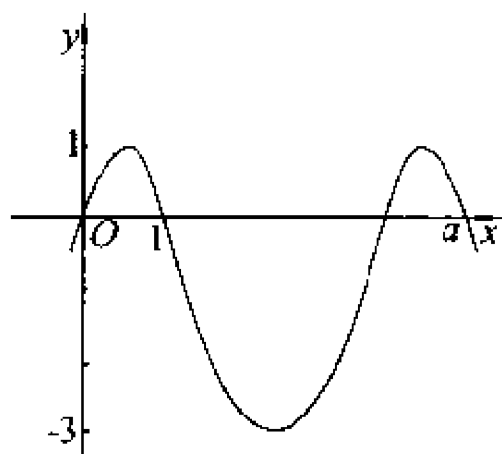


图 9-4

解 由图 9-4 知,

$$A=\frac{1}{2}[1-(-3)]=2,$$

所以,有

$$y = 2\sin(\frac{2\pi}{3}x + \varphi) - 1,$$

又由图 9－4 知 $x=0,1$ 时，$y=0$，即

$$2\sin\varphi - 1 = 2\sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) - 1 = 0. \qquad ①$$

注意到 $\varphi\in[0,2\pi)$，由①可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

因 $T=\frac{2\pi}{\frac{2\pi}{3}}=3$，根据图 9－4，$a=4$.

例 4 设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1, x>0\}$，$N=\{(x,y)\mid \arctan x + \operatorname{arccot} y=\pi\}$，求证：$N\subset M$.

证明 $$\arctan x + \operatorname{arccot} y = \pi, \qquad ①$$

即 $$\arctan x = \pi - \operatorname{arccot} y.$$

所以 $$\tan(\arctan x) = \tan(\pi - \arctan y) = -\tan(\operatorname{arccot} y),$$

即得 $x=-\frac{1}{y}$，所以 $xy=-1$.

注意到这里 $x>0$，$y<0$，否则因 $x<0$，$y>0$，有 $\arctan x\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$\operatorname{arccot} y\in(0,\frac{\pi}{2})$，导致 $\arctan x+\operatorname{arccot} y<\pi$，这就与①不符. 所以 $N\subseteq M$.

不难看出，$(1,1)\in M$，$(1,1)\notin N$. 故 $N\subset M$.

注 在进行有关反三角函数的运算时，注意从定义出发考虑问题，要认识到反三角函数值是限于某个区间的“特殊”角，在相当多的场合由于它囿于特定范围而使问题变得简单. 同时要注意自变量与函数间的一一映射关系. 这也常是问题得以解决的一个不容忽视的因素.

例 5 设 $x\in[0,\pi]$，试比较 $\cos(\sin x)$ 与 $\sin(\cos x)$ 大小.

分析 令 $x=0,\frac{\pi}{2},\pi$ 分别代入 $\cos(\sin x)$ 和 $\sin(\cos x)$，易得 $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

又当$\frac{\pi}{2}<x<\pi$时，$0<\sin x<1<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<-1<\cos x<0$，则$\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

下面证明当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$，即只需证明$\sin(\frac{\pi}{2}-\sin x)>\sin(\cos x)$. 因$0<x<\frac{\pi}{2}$，有$0<\frac{\pi}{2}-\sin x<\frac{\pi}{2}$，$0<\cos x<1<\frac{\pi}{2}$. 故只需证明$\frac{\pi}{2}-\sin x>\cos x$，即证明$\sin x+\cos x<\frac{\pi}{2}$，而$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\leqslant\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$成立.

例 6 求函数$f(x)=\sin(\cos x)$的最小正周期.

解 首先，由

$$f(x+2\pi)=\sin[\cos(x+2\pi)]=\sin(\cos x)=f(x),$$

知函数$f(x)$是周期函数，2π是它的一个周期. 假设函数$f(x)$存在最小正周期T，且$0<T<2\pi$. 那么

$$\sin[\cos(x+T)]=\sin(\cos x)$$

对一切实数x成立.

取$x=0$，上式可写为

$$\sin(\cos T)=\sin 1.$$

然而$-1\leqslant\cos T<1$，函数$\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上递增，有

$$\sin(\cos T)<\sin 1.$$

矛盾！故不存在$T\in(0,2\pi)$为函数$f(x)$的周期. 所求函数$f(x)$的最小正周期为2π.

例 7 已知函数$f(x)=3\sin(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3})$（$k$为非零整数），试求最小正整数$k$，使得当$x$在任意两个整数间（包括整数本身）变化时，函数至少有一个值是函数$f(x)$的最大值M，还有一个值是函数$f(x)$的最小值m.

分析 当$\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{10n}{k}\pi+\frac{5\pi}{6k}$时，函数$f(x)$有

最大值 3,当$\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{3\pi}{2}$,即 $x=\frac{10n}{k}\pi+\frac{35\pi}{6k}$时函数$f(x)$有最小值 -3.这里 $n\in Z$.最小正周期

$$T=\frac{2\pi}{\frac{|k|}{5}}=\frac{10\pi}{|k|}.\qquad ①$$

因要求任意两个整数间函数 $f(x)$至少有一个值为 M,有一个值为 m,且 k 为非零整数,可见函数 $f(x)$取最大值 M 与最小值m 的自变量并非整数,在区间$[0,n](n\in N)$上至少有 $2n$ 个值,第一个为 $x_1=\frac{5\pi}{6k}$,第 $2n$ 个为 $x_{2n}=\frac{10(n-1)\pi}{k}+\frac{35\pi}{6k}$,且

$$x_{2n}-x_1<n,$$

即
$$\frac{10(n-1)\pi}{k}+\frac{5\pi}{k}<n.$$

因
$$\frac{10(n-1)\pi}{k}+\frac{5\pi}{k}=(n-1)T+\frac{T}{2},$$

故
$$(2n-1)\cdot\frac{T}{2}<n,$$

推得
$$T<\frac{2n}{2n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}.\qquad ②$$

欲使对任意大的正整数 n,②式成立,唯有 $T\leqslant 1$.

值若 $T\leqslant 1$,由于任意两整数间距离不小于 1,故其间一定包含有函数 $f(x)$的一个最小正周期,也就一定有一最大值 M 与一最小值 m.

综上所述,当且仅当 $T\leqslant 1$ 时函数 $f(x)$在任意两个整数间至少有一取最大值 M 的自变量值,也有一取最小值 m 的自变量值.

由①得$|k|\geqslant 10\pi$,从而得所求最小正整数 $k=32$.

注 "要使任意两整数间,函数 $f(x)$至少有一个值是 M 与一个值是 m,须且只须 T 不超过 1"并非不证自明的.

例 8 已知 α,β 为锐角,且 $x(\alpha+\beta-\frac{\pi}{2})>0$,试证不等式

$$f(x)=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\right)^x+\left(\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\right)^x<2$$

对一切非零实数 x 成立.

证明 若 $x>0$,依题设

$$\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}. \quad ①$$

因 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,故由①得

$$0<\frac{\pi}{2}-\alpha<\beta<\frac{\pi}{2},$$

$$0<\frac{\pi}{2}-\beta<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

根据正弦函数在区间$(0,\frac{\pi}{2})$单调递增,知

$$0<\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)<\sin\beta,$$

$$0<\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)<\sin\alpha,$$

即

$$0<\cos\alpha<\sin\beta,$$
$$0<\cos\beta<\sin\alpha.$$

所以$0<\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}<1,0<\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}<1$,函数$f(x)$在区间$[0,+\infty)$上严格单调递减,有$f(x)<f(0)=2$.

若$x<0$,则$\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$,仿上可知$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}>1,\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}>1$,则函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$上严格单调递增,又有$f(x)<f(0)=2$.

综上所述,对一切非零实数 x,所要证的不等式成立.

这里补充介绍一个重要不等式:

$$\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha \quad \alpha\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

证明如下:如图 9-5,单位圆 O 中,AC 为切线,可得

$$S_{\triangle AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\triangle AOC},$$

即$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\alpha<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\alpha<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\alpha$，

化简即得所欲证之不等式.

上述证明无疑是利用面积关系证题的一个相当漂亮的例子.

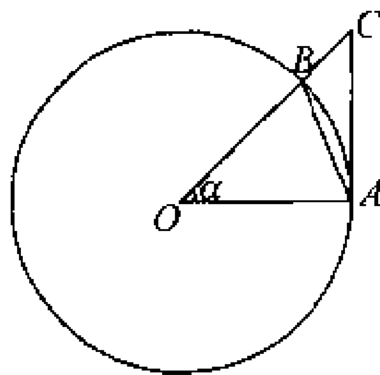


图 9－5

例 9 求证：在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内存在惟一的实数对(c,d)，$c,d\in(0,\frac{\pi}{2})$，且 $c<d$，使得$\sin(\cos c)=c$，$\cos(\sin d)=d$ 成立.

解 设函数$f(x)=\sin(\cos x)-x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则$f(x)$在定义域上为连续函数. 任取 $x_1,x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$使得 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant\frac{\pi}{2}$，$f(x_1)=\sin(\cos x_1)-x_1$，$f(x_2)=\sin(\cos x_2)-x_2$.

由于 $y=\cos x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$单调递减，则 $\cos x_1>\cos x_2$，且 $\cos x_1$，$\cos x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$，而 $y=\sin x$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是单调递增的，所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$. 又因 $x_1<x_2$，则 $\sin(\cos x_1)-x_1>\sin(\cos x_2)-x_2$，即 $f(x_1)>f(x_2)$. 所以 $f(x)$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是减函数.

因 $f(0)=\sin 1>0$，$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，故 $f(x)$的图象在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上与 x 轴有惟一交点，即存在惟一实数 $c\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得等式 $\sin(\cos c)=c$ 成立.

同理可证明存在惟一实数 $d\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得等式 $\cos(\sin d)=d$ 成立.

因为 $\cos(\sin d)=d$，所以 $\sin(\cos(\sin d))=\sin d$. 注意到 $\sin d\in(0,\frac{\pi}{2})$，且在$(0,\frac{\pi}{2})$内只有惟一解 c 使 $\sin(\cos c)=c$ 成立，故 $c=\sin d$.

当 $x>0$ 时，$\sin x<x$ 成立，有 $\sin d<d$，于是 $c<d$. 命题成立.

练习九

一、选择题

1. 函数 $y=2\lg[\sin(\frac{\pi}{4}-3x)]$的周期是　　　　(　　).

(A)$\frac{\pi}{3}$　　(B)$\frac{2\pi}{3}$　(C)$\frac{3\pi}{4}$　　(D)不存在

2. 不等式 $\arccos x \leq \arccos(2x+1)$的一个解是　　　　(　　).

(A)$-\frac{1}{2}$　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)1　　(D)-1

3. 把函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$,再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{2}$,则所得图象的函数是　　　　(　　).

(A)$y=\sin(4x+\frac{3\pi}{8})$　　(B)$y=\sin(4x+\frac{\pi}{8})$

(C)$y=\sin 4x$　　(D)$y=\sin x$

4. 已知$0<x<y<\frac{\pi}{2}$,又设 $a=\frac{\tan x}{\tan y}$, $b=\frac{\sin x}{\sin y}$, $c=\sec(x-y)$,则　　　　(　　).

(A)$a<b<c$　(B)$b<a<c$　(C)$c<a<b$　(D)$c<b<a$

5. 方程 $\arcsin(\sin x)=\frac{\pi}{16}|x|$的实根共有　　　　(　　).

(A)5个　　(B)6个　　(C)7个　　(D)无穷多个

6. 设 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 且 $\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,设 $x=|\log_{\tan\alpha}(1-\sin\alpha)|$, $y=|\log_{\tan\alpha}(1+\sin\alpha)|$,则 x 和 y 的大小关系是　　　　(　　).

(A)$x>y$　　(B)$x<y$

(C)当$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$时,$x>y$,当$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时,$x<y$

(D)当$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$时,$x<y$,当$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时,$x>y$

二、填空题

7. 函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$的图象的一条对称轴方程是 $x=\frac{\pi}{8}$，且 $\varphi\in(0,\pi)$，则 $\varphi=$________.

8. 函数 $y=A\sin(wx+\varphi)(A>0,w>0)$在同一周期内当 $x=\frac{\pi}{12}$时 y 取最大值 2，当 $x=-\frac{5}{12}\pi$ 时，y 取最小值 -2，它的解析表达式是________.

9. 若 $\sec x+\tan x=\frac{22}{7}$，$\csc x+\cot x=\frac{m}{n}$，其中$\frac{m}{n}$是既约分数，则 $m+n=$________.

10. 方程 $10^{|\lg|x||}=2\cos x$ 的实根的个数是________.

11. 设 $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$，$A=\cos\theta^{\sin\theta^{\sin\theta}}$，$B=\sin\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}$，$C=\cos\theta^{\sin\theta^{\cos\theta}}$，$D=\cos\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}$，则在 A,B,C,D 中最大的一个是________.

12. 对 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，使 $\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$ 成立的实数 m 的范围是________.

三、解答题

13. 证明 $f(x)=\arccos x-\frac{\pi}{2}$是奇函数.

14. 试证，对所有正数 x 都成立不等式：

$$x^2+\pi x+\frac{15\pi}{2}\sin x>0.$$

15. 解方程：$\cos^n x-\sin^n x=1$($n\in N$，n 为奇数).

16. 试问 $y=\sin x^2$ 是周期函数吗？说明理由.

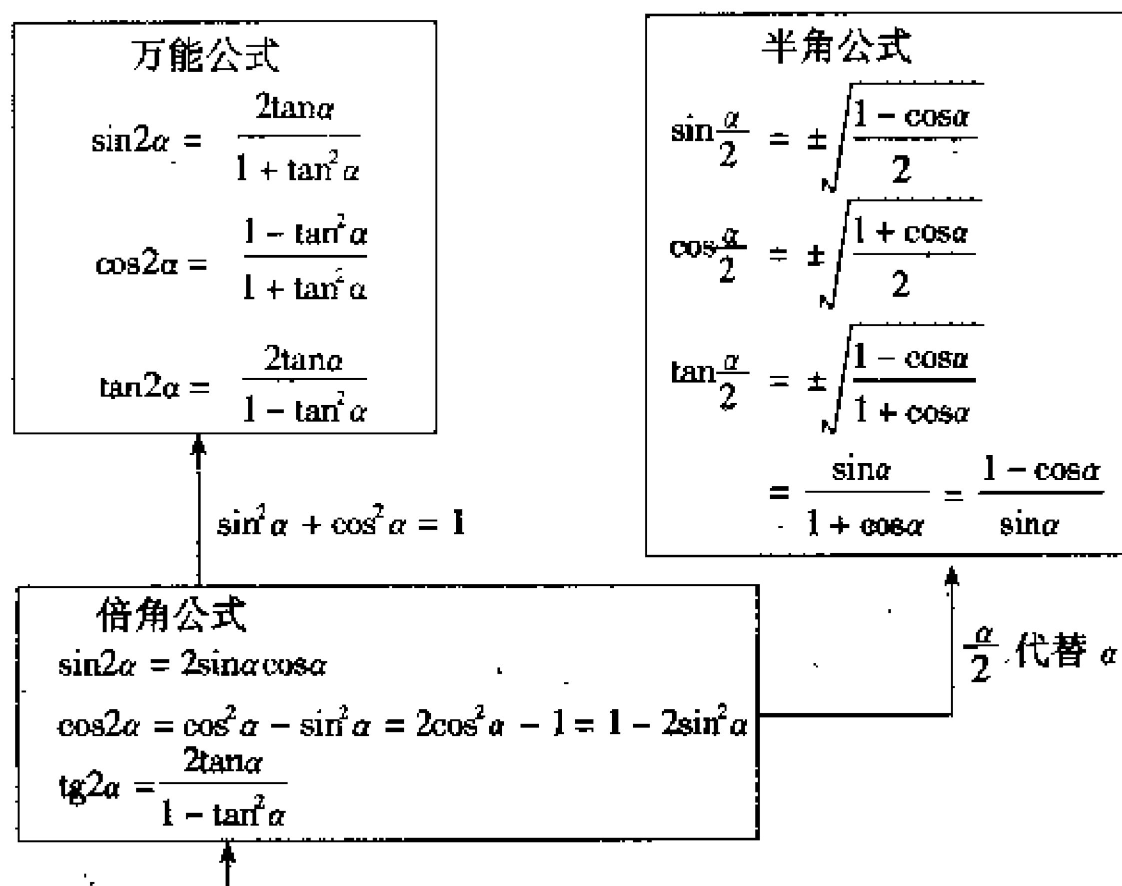
17. 有多少个实数 x 满足方程

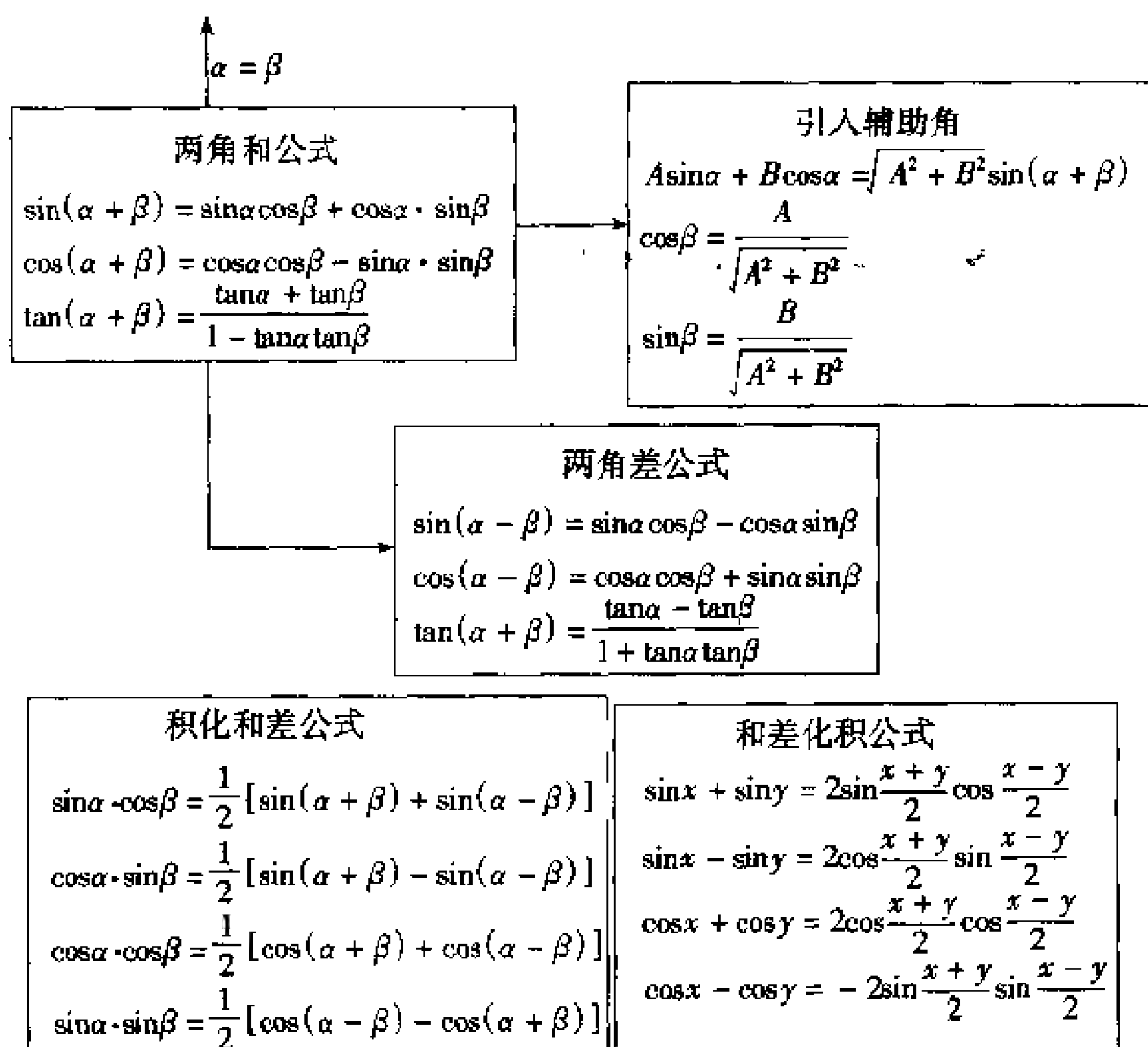
$$\frac{1}{5}\log_2 x=\sin(5\pi x).$$

第十讲　两角和与差的三角函数

知识点和方法述要

1. 三角函数式的恒等变形主要依据一般的法则和重要公式，除同角关系式、诱导公式外，有和、差、倍、半公式，积化和差与和差化积公式，万能公式等. 这几组公式中最基本的公式是两角和的余弦公式，其他公式都可以由它推导出来，推导过程中的一些变换也是富有代表性的，这些公式的内在联系和推导线索如下表所示.





2. 和角、差角、倍角、半角公式刻画的是和角、差角、倍角、半角分别与它们相应的单角之间三角函数的关系,关键在“角”上.所谓和角、差角、倍角、半角与单角彼此都是相对而言的,深入观察、分析问题中所涉及三角函数式所含角间的内在联系,对角进行“组合”、变形,常常是灵活运用这些公式解决问题的关键所在.和、积互化则是揭示三角函数的加法(减法)运算和乘法运算互相转化的规律.和差化积时必须是在两个同名三角函数间进行,且系数的绝对值相同,凡是公式中某个式子没有意义的角,都不适合公式.三角等式的证明的形式有从左到右、从右到左、左右归一等,通常采用化繁为简、逐步消除等式两边式子的结构在角、函数种类及运算上的差异的方式,注意

利用公式和定理的双向性(既可以从左到右,又可以从右到左)及各种变化、特殊角的三角函数、切弦互化、倍、半角公式的升幂、降次等,审时度势,从角、函数、系数等方向选择合理的角度进行恒等变形.

3. 半角公式中,根号前的符号由半角所在象限决定,把 $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 化成$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$时,其中辅助角 φ 取决于 a、b 的符号及 $\tan\varphi=\frac{b}{a}$. 万能公式提供了用角之半的正切表示该角任何三角函数的可能性,若令 $\tan\frac{\alpha}{2}=t$,则 α 的各种三角函数就可通过万能公式化成 t 为变元的函数,使三角问题转化为代数问题.

例 题 精 讲

例1 (1) 已知 $\cos(2\alpha-\beta)=-\frac{1}{9}$, $\sin(\alpha-2\beta)=\frac{2}{3}$, 且 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,求 $\cos(\alpha+\beta)$.

(2) 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta)$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 求 $\tan(\alpha+\beta)$.

分析 (1) 观察角的特征:

$$\alpha+\beta=(2\alpha-\beta)-(\alpha-2\beta),$$

因已知 $\cos(2\alpha-\beta)$, $\sin(\alpha-2\beta)$,故只须计算 $\sin(2\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-2\beta)$.

依题设,由 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$,知 $-\frac{\pi}{2}<2\alpha-\beta<\pi$, $-\pi<\alpha-2\beta<\frac{\pi}{2}$.

因 $\cos(2\alpha-\beta)=-\frac{1}{9}$, $\sin(\alpha-2\beta)=\frac{2}{3}$,所以

$$\sin(2\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(2\alpha-\beta)}$$

$$=\sqrt{1-(-\frac{1}{9})^2}=\frac{4\sqrt{5}}{9},$$

$$\cos(\alpha-2\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-2\beta)}$$

$$=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

从而可得

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[(2\alpha-\beta)-(\alpha-2\beta)]\\&=\cos(2\alpha-\beta)\cos(\alpha-2\beta)+\sin(2\alpha-\beta)\sin(\alpha-2\beta)\\&=(-\frac{1}{9})\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\cdot\frac{2}{3}\\&=\frac{7\sqrt{5}}{27}.\end{aligned}$$

(2) 因 $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$, 故 $\cos\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 注意到 $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$,从而作以下变换:

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sin[(\alpha+\beta)-\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin\beta\\&=\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}-\cos(\alpha+\beta)\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}\qquad①\end{aligned}$$

又
$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{2}\sin(\alpha+\beta),\qquad②$$

由①,②得
$$2\sin(\alpha+\beta)=-\cos(\alpha+\beta),$$

即
$$\tan(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}.$$

例 2 求值: $\cos10^\circ\cdot\cos20^\circ\cdot\cos30^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos50^\circ\cdot\cos60^\circ\cdot\cos70^\circ\cdot\cos80^\circ$.

分析一 各余弦函数的角依次为

$$10^\circ,20^\circ,30^\circ,40^\circ,50^\circ,60^\circ,70^\circ,80^\circ.$$

利用特殊角的三角函数值化简,有

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}(\cos90^\circ+\cos70^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos90^\circ+\cos50^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos90^\circ+\\&\quad\cos30^\circ)\cdot\frac{1}{2}(\cos90^\circ+\cos10^\circ)\\&=\frac{1}{16}\cos70^\circ\cdot\cos50^\circ\cdot\cos30^\circ\cdot\cos10^\circ\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{32}\cos70° \cdot \cos50° \cdot \cos10°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{64}(\cos120° + \cos20°)\cos10°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{128}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{64}\cos20° \cdot \cos10°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{128}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{128}(\cos30° + \cos10°)$$

$$= \frac{3}{256}.$$

分析二 以下各角:10°,20°,40°,80°,后者是前者的2倍.利用二倍角公式可作如下变换:

$$\cos10° \cdot \cos20° \cdot \cos40° \cdot \cos80°$$

$$= \frac{1}{2\sin10°}2\sin10° \cdot \cos10° \cdot \cos20° \cdot \cos40° \cdot \cos80°$$

$$= \frac{1}{2\sin10°}\sin20° \cdot \cos20° \cdot \cos40° \cdot \cos80°$$

$$= \frac{1}{4\sin10°}\sin40° \cdot \cos40° \cdot \cos80°$$

$$= \frac{1}{8\sin10°}\sin80° \cdot \cos80°$$

$$= \frac{\sin160°}{16\sin10°} = \frac{\sin20°}{16\sin10°} = \frac{1}{8}\cos10°.$$

于是,所求乘积为

$$\frac{1}{8}\cos10° \cdot \cos30° \cdot \cos50° \cdot \cos60° \cdot \cos70°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{32}\cos10° \cdot \cos50° \cdot \cos70°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{64}\cos10°(\cos120° + \cos20°)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{128}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{64}\cos10° \cdot \cos20°$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{128}\cos10° + \frac{\sqrt{3}}{128}(\cos30° + \cos10°)$$

$$= \frac{3}{256}.$$

例 3 求值:

(1) $\sin84° - \sin48° + \sin24° + \sin12°$,

(2) $\tan189° - \cot63° + \tan297° - \cot171°$.

分析 (1) "凑"特殊角,有

$$原式 = (\sin84° + \sin24°) - (\sin48° - \sin12°)$$

$$= 2\sin54°\cos30° - 2\sin18°\cos30°$$

$$= \sqrt{3}(\sin54° - \sin18°)$$

$$= 2\sqrt{3}\sin18°\cos36°.$$

利用二倍角公式,改变三角式结构形式,可得

$$原式 = 2\sqrt{3}\,\frac{\sin36°}{2\cos18°} \cdot \cos36°$$

$$= \sqrt{3}\,\frac{\sin72°}{2\cos18°}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) 利用诱导公式简化所给三角式,

$$原式 = \tan9° - \tan27° - \tan63° + \tan81°$$

$$= (\tan9° + \tan81°) - (\tan27° + \tan63°).$$

再"切"化"弦",即得

$$原式 = \frac{\sin90°}{\cos9° \cdot \cos81°} - \frac{\sin90°}{\cos27° \cdot \cos63°}$$

$$= \frac{1}{\cos9° \cdot \sin9°} - \frac{1}{\cos27° \cdot \sin27°}$$

$$= \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ}$$

$$= \frac{4\cos 36^\circ \cdot \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \sin 54^\circ}$$

$$= 4.$$

例 4 已知

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha + c = 0, \qquad ①$$

$$a\cos\beta + b\sin\beta + c = 0. \qquad ②$$

且 $a \neq 0, \alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in (0, \pi)$，试求 $\cos(\alpha + \beta)$.

解 ①－②得

$$a(\cos\alpha - \cos\beta) + b(\sin\alpha - \sin\beta) = 0,$$

即
$$-2a\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} + 2b\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0. \qquad ③$$

因 $\alpha, \beta \in (0, \pi), \alpha \neq \beta$，所以 $\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right| \in (0, \frac{\pi}{2})$，从而

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \neq 0. \qquad ④$$

由 $\alpha \neq 0$，及③，④可得

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{b}{a}. \qquad ⑤$$

所以，由万能公式和⑤即得

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1 - (\frac{b}{a})^2}{1 + (\frac{b}{a})^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

例 5 证明：$\frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec\theta + \tan\theta + 1} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{1 + \sec\theta - \tan\theta}$. ①

证明 ①可写为

$$\frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} = \frac{\cos\theta + \sin\theta - 1}{\cos\theta - \sin\theta + 1},$$

$(\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z})$. 因 ②

$$2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin\theta + \cos\theta)^2,$$

即
$$1 - (\sin\theta - \cos\theta)^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1,$$

所以
$$(1 - \sin\theta + \cos\theta)(1 + \sin\theta - \cos\theta)$$
$$= (1 + \cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta - 1). \quad ③$$

③两边同除以$(1+\cos\theta+\sin\theta)(1+\cos\theta-\sin\theta)$,即可得②.

注 1. 例5还可采用以下两种证明:

(1) 注意到 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$,有

$$\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta} \quad (\tan\theta \neq 0),$$

假若 $\tan\theta = 0$,①显然成立.应用等比定理得

$$\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\tan\theta + (\sec\theta - 1)}{(\sec\theta + 1) + \tan\theta} = \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec\theta + \tan\theta + 1}, \quad ④$$

及
$$\frac{\tan\theta}{\sec\theta + 1} = \frac{\tan\theta - (\sec\theta - 1)}{(\sec\theta + 1) - \tan\theta} = \frac{1 - \sec\theta + \tan\theta}{1 + \sec\theta - \tan\theta}, \quad ⑤$$

比较④,⑤即知①成立.综上所述,命题获证.

(2) 变换"1".①右边可变为

$$\frac{\sec^2\theta - \tan^2\theta - \sec\theta + \tan\theta}{\sec^2\theta - \tan^2\theta + \sec\theta - \tan\theta} = \frac{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta - 1)}{(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta + 1)}$$
$$= \frac{\sec\theta + \tan\theta - 1}{\sec\theta + \tan\theta + 1},$$

即为①的左边.

2. 在探求上述几种不同证题思路过程中,主要依据了同角关系式.不仅仅是采用了由因导果的思维方式,其中隐含有执果索因的思维方式.三角等式的证明方法由此可见一斑.

例6 已知 $\tan(\alpha+\beta) = 3\tan\alpha$,求证

$$2\sin 2\beta - \sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 2\beta). \quad ①$$

分析 ①即

$$2\sin 2\beta = \sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha. \quad ②$$

②又可改写为

$$4\sin\beta\cdot\cos\beta=2\sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta,$$

即
$$\cos\beta[2\sin\beta-\sin(2\alpha+\beta)]=0. \quad ③$$

依题设，$\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$，即

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

可得
$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=3\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta),$$

也就是

$$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta),$$

即
$$\sin\beta=2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta). \quad ④$$

由④又可积化和差得

$$\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta. \quad ⑤$$

由⑤知③成立，故等式①成立.

例 7 证明

$$\frac{1}{\sin2x}+\frac{1}{\sin4x}+\cdots+\frac{1}{\sin2^nx}=\cot x-\cot2^nx,$$

其中，$n\in\mathrm{N}$，$x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，$\lambda\in\mathrm{Z}$.

证明 因为 $x\neq\frac{\lambda\pi}{2^k}$，所以 $2^kx\neq\lambda\pi$（$k=0,1,2,\cdots,n$，$\lambda\in\mathrm{Z}$）. $\sin2^kx\neq0$. $\cot2^kx$ 有意义. 一般地

$$\frac{1}{\sin2\alpha}=\frac{2\cos^2\alpha-\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos2\alpha}{\sin2\alpha}=\cot\alpha-\cot2\alpha.$$

取 $\alpha=x,2x,2^2x,\cdots,2^{n-1}x$，有

$$\frac{1}{\sin2x}=\cot x-\cot2x,$$

$$\frac{1}{\sin4x}=\cot2x-\cot4x,$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sin2^{n-1}x}=\cot2^{n-2}x-\cot2^{n-1}x,$$

$$\frac{1}{\sin 2^n x} = \cot 2^{n-1}x - \cot 2^n x,$$

将上述所有等式两边分别相加得欲证之等式.

例 8 (1) 若 $a,b,c\in \mathrm{R}^+$,证明

$$\arctan\frac{a-b}{1+ab} + \arctan\frac{b-c}{1+bc} + \arctan c = \arctan a.$$

(2) 证明 $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8} + \cdots + \arctan\frac{1}{2n^2} = \arctan(2n+1) - \frac{\pi}{4}(n\in \mathrm{N})$.

分析 (1)观察欲证等式的结构,联想到差角的正切公式.因 $a,b,c\in R^+$,故设 $a=\tan\alpha$, $b=\tan\beta$, $c=\tan\gamma$, $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\frac{\pi}{2})$,于是

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{a-b}{1+ab}.$$

注意到 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$,故有

$$\alpha-\beta = \arctan\frac{a-b}{1+ab} = \arctan a - \arctan b.$$

同理,有

$$\arctan\frac{b-c}{1+bc} = \arctan b - \arctan c.$$

所以 $\arctan\frac{a-b}{1+ab} + \arctan\frac{b-c}{1+bc} + \arctan c$

$$= (\arctan a - \arctan b) + (\arctan b - \arctan c) + \arctan c$$

$$= \arctan a.$$

(2) 因

$$\arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}$$

$$= \arctan(2k+1) - \arctan(2k-1). \quad ①$$

可取 $k=1,2,\cdots,n$ 由①知

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan 3 - \arctan 1,$$

$$\arctan\frac{1}{8}=\arctan 5-\arctan 3,$$

$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$

$$\arctan\frac{1}{2n^2}=\arctan(2n+1)-\arctan(2n-1),$$

将上述各式相加,即得

$$\begin{aligned}&\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}\\&=\arctan(2n+1)-\arctan 1\\&=\arctan(2n+1)-\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

注 例7、例8中我们采用了裂项相消的方法,通过三角变换将和式中每一项都改变为两项之差,尔后前后错项相消,使和式简化为欲证之最简结果.

例9 已知 $f(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\alpha)+\sin^2(\theta+\beta)$,其中 α,β 是适合 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$ 的常数.试问 α,β 为何值时,$f(\theta)$为与 θ 无关的定值.

分析 投石问路.取 θ 之值分别为 $0,-\alpha,-\beta,\frac{\pi}{2}$,有

$$f(0)=f(-\alpha)=f(-\beta)=f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha+\sin^2\beta&=\sin^2\alpha+\sin^2(\beta-\alpha)\\&=\sin^2\beta+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=1+\cos^2\alpha+\cos^2\beta.\end{aligned}\qquad①$$

由①可得

$$\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2(\beta-\alpha)=\frac{3}{4},\qquad②$$

因 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$,故 $0<\beta-\alpha\leqslant\pi$,由②得

$$\sin\alpha=\sin\beta=\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

可解得 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3}$.

以下再证 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3}$满足要求.事实上,

$$f(\theta)=\sin^2\theta+\sin^2(\theta+\frac{\pi}{3})+\sin^2(\theta+\frac{2\pi}{3})$$

$$=\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1-\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})}{2}+\frac{1-\cos(2\theta+\frac{4\pi}{3})}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}[\cos(2\theta+\frac{2\pi}{3})+\cos(2\theta+\frac{4\pi}{3})]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\cdot2\cos(2\theta+\pi)\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{3}{2}$$

与 θ 无关.

例 10 函数

$$F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cdot\cos x-\sin^2x+Ax+B|$$

在 $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 上最大值 M 与参数 A,B 有关,问 A,B 取什么值时 M 为最小? 证明你的结论.

分析 $F(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$. 当 $A=B=0$ 时 $F(x)$ 成为

$$f(x)=\sqrt{2}\,|\sin(2x+\frac{\pi}{4})|,$$

它在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上取 $x_1=\frac{\pi}{8}$, $x_2=\frac{5\pi}{8}$, $x_3=\frac{9\pi}{8}$, 此时 $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{2}$. 作图观察,猜想 $\sqrt{2}$ 即为最小的 M 值.

正面论证难以展开,继续抓住上述特殊情形,从反面考虑. 假设存在 A_0,B_0 不同时为 0,有

$$\max F(x)\leqslant\sqrt{2}\qquad(0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}),$$

则 $F(\frac{\pi}{8})\leqslant\sqrt{2}$, $F(\frac{5\pi}{8})\leqslant\sqrt{2}$, $F(\frac{9\pi}{8})\leqslant\sqrt{2}$. 即

$$\left|\sqrt{2}+\frac{\pi}{8}A_0+B_0\right|\leqslant\sqrt{2},$$

$$\left|-\sqrt{2}+\frac{5\pi}{8}A_0+B_0\right|\leqslant\sqrt{2},$$

$$\left|\sqrt{2}+\frac{9\pi}{8}A_0+B_0\right|\leqslant\sqrt{2},$$

也就是

$$\begin{cases}-\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{8}A_0+B_0\leqslant\sqrt{2},\\ -\sqrt{2}\leqslant-\sqrt{2}+\dfrac{5\pi}{8}A_0+B_0\leqslant\sqrt{2},\\ -\sqrt{2}\leqslant\sqrt{2}+\dfrac{9\pi}{8}A_0+B_0\leqslant\sqrt{2}.\end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases}-2\sqrt{2}\leqslant\dfrac{\pi}{8}A_0+B_0\leqslant 0,\\ 0\leqslant\dfrac{5\pi}{8}A_0+B_0\leqslant 2\sqrt{2},\\ -2\sqrt{2}\leqslant\dfrac{9\pi}{8}A_0+B_0\leqslant 0.\end{cases}$$

注意到

$$\begin{cases}\dfrac{\pi}{8}A_0+B_0\leqslant 0,\\ \dfrac{5\pi}{8}A_0+B_0\geqslant 0,\end{cases}$$

知 $A_0\geqslant 0$,及

$$\begin{cases}\dfrac{5\pi}{8}A_0+B_0\geqslant 0,\\ \dfrac{9\pi}{8}A_0+B_0\leqslant 0,\end{cases}$$

知 $A_0\leqslant 0$.

可见 $A_0=0$,进而又知 $B_0=0$,导致矛盾.这说明若存在 A,B 不同时为0,则 M 不可能小于或等于$\sqrt{2}$.

练 习 十

一、选择题

1. 要使 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=\frac{4m-6}{4-m}$有意义，$m$ 的取值范围是 (　　).

(A)$[-1,0]$　　(B)$[0,\frac{7}{3}]$

(C)$[-1,\frac{7}{3}]$　　(D)$[\frac{3}{2},4]$

2. 已知：$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cot\beta=2$，且 α 在第二象限，则 $\tan(\alpha-\beta)$的值是 (　　).

(A)2　(B)-2　(C)$\frac{2}{12}$　(D)$-\frac{2}{11}$

3. 已知：$25\sin^2\theta+\sin\theta-24=0$，$\theta$ 在第二象限，那么 $\cos\frac{\theta}{2}$等于 (　　).

(A)$\frac{3}{5}$　(B)$\pm\frac{3}{5}$　(C)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　(D)$\frac{4}{5}$

4. 设△ABC 中，$\frac{\tan B}{\tan C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$，那么△$ABC$ 为 (　　).

(A)等腰三角形　(B)等边三角形

(C)直角三角形　(D)等腰或直角三角形

二、填空题

5. 方程 $\sin x+\cos x=k$，在区间$[0,\pi]$上有两个不等解，则实常数 k 的取值范围是______.

6. $\sec50^\circ+\cot80^\circ$的值为______.

7. $\tan20^\circ(\csc10^\circ-1)$的值为______.

8. 已知 α,β 为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13}$，$\cos(2\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，则 $\cos\alpha$ $=$______.

9. A,B,C 为$\triangle ABC$的三个内角，那么，$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C$的值为______.

10. 适合方程 $\operatorname{arccot}x+\operatorname{arccot}(xy)=\arctan 3$ 的一切正整数解是______.

11. 已知 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$ 的值是______.

12. 已知 $\cos A-\cos B=\frac{1}{2}$，$\sin A-\sin B=-\frac{1}{3}$，则 $\sin(A+B)$ 的值是______.

三、解答题

13. 求 $\tan 6°\cdot\tan 42°\cdot\tan 66°\cdot\tan 78°$ 的值.

14. 已知 α,β 都是锐角，且 $3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3\sin 2\alpha-2\sin 2\beta=0$. 求证：$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

15. 已知 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$.

16. 已知函数 $f(x)=2a\sin^2x-2\sqrt{3}a\sin x\cos x+a+b$ 的定义域是 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，值域是 $[-5,1]$，求 a,b 的值.

第十一讲　正弦定理和余弦定理

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 正弦定理：在$\triangle ABC$中，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

也可表示为

$$a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C.$$

2. 余弦定理：在$\triangle ABC$中：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B;$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

3. 正弦定理和余弦定理是沟通一般三角形边角关系的两个十分重要的定理.在不少场合使我们免去了添置辅助线所带来的种种困扰.当所涉及对象出现在几个互相关联的三角形中时，要特别注意其中的公用角(边)、相等角(边)、互补角等，灵活应用两个定理进行计算推导.

4. 在正弦定理中，三角形边与所对角的正弦比等于外接圆直径，与圆有关的相等角、互补角甚多，因而圆成为正弦定理在几何中应用的一个最为重要的场所之一.

5. 利用余弦定理易得斯台沃特定理：

在$\triangle ABC$中，若$BD=p$，$DC=q$，则

$$AD^2=\frac{b^2p+c^2q}{p+q}-pq.$$

证明　如图11-1，在$\triangle ABD$与$\triangle ABC$中，运用余弦定理得

$$\cos B=\frac{c^2+p^2-AD^2}{2cp}$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \qquad ①$$

因 $a = p + q$，故代人①即得

$$AD^2 = \frac{b^2 p + c^2 q}{p + q} - pq.$$

由斯台沃特定理可直接得到以下重要结论：

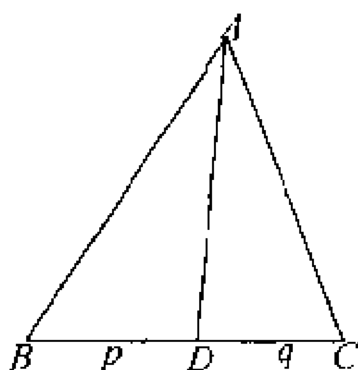


图 11－1

(1) 当 AD 是$\triangle ABC$ 中线时，$p = q = \frac{1}{2}a$，

得 $AD^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$即 $AD = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$，此为中线长公式.

(2) 当 AD 是$\triangle ABC$ 的内角平分线时，易得

$$p = \frac{ac}{b + c}, q = \frac{ab}{b + c}.$$

$$AD^2 = bc - \frac{a^2 bc}{(b + c)^2}$$

$$= \frac{bc(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2},$$

有

$$AD = \frac{2}{b + c}\sqrt{bc\, s(s - a)},$$

其中 $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$，此为内角平分线长公式.

(3) 当 AD 是$\triangle ABC$ 的高时，$AD^2 = b^2 - q^2 = c^2 - p^2$，又 $p + q = a$，解得 $p = \frac{1}{2a}(a^2 - b^2 + c^2)$，$q = \frac{1}{2a}(a^2 + b^2 - c^2)$，故

$$AD^2 = \frac{1}{4a^2}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^2 - b^2 - c^2),$$

即

$$AD = \frac{1}{2a}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

$$= \frac{2}{a}\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$,此为 BC 边上高的长度公式,进而$\triangle ABC$ 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot AD=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

即得海伦公式.

例 题 精 讲

例1 已知锐角$\triangle ABC$的外心为D,过A,B,D三点作圆,分别与AC,BC相交于M,N两点,求证:$\triangle MNC$的外接圆半径等于$\triangle ABD$的外接圆半径.

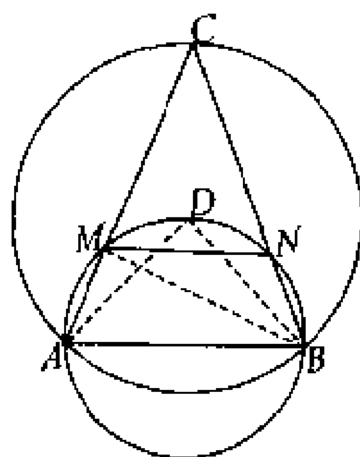


图 11-2(1)

分析 若M在CA上,如图11-2(1),连接BM、AD、BD.

$$\angle AMB=\angle ADB=2\angle C,$$

于是$\angle MBC=\angle C$,有

$$\frac{MN}{\sin\angle C}=\frac{MN}{\sin\angle MBN}.$$

根据正弦定理即知$\triangle MNC$,$\triangle MNB$的外接圆半径相等.

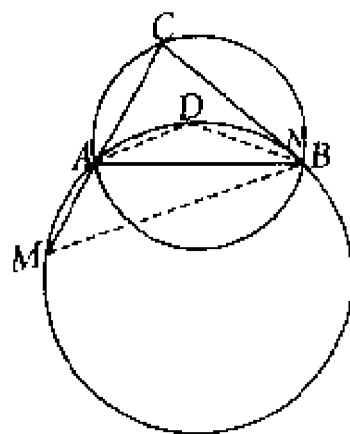


图 11-2(2)

若M在CA延长线上,则

$$\begin{aligned}\angle AMB&=180^\circ-\angle ADB\\&=180^\circ-2\angle C,\end{aligned}$$

同样有$\angle MBC=\angle C$.命题成立.

类似地,可以证明其他情形.

例2 已知,如图11-3,O为凸五边形$ABCDE$内一点,且$\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,$\angle 5=\angle 6$,$\angle 7=\angle 8$.求证:$\angle 9$和$\angle 10$相等或互补.

分析 $\angle 9$和$\angle 10$相等或互补,诱使联想$\sin\angle 9=\sin\angle 10$.观察

图 11－3，题设条件正好以正弦定理为媒介设置了一条“传递”正道.

$$\frac{OA}{\sin\angle 10}=\frac{OB}{\sin\angle 1}=\frac{OB}{\sin\angle 2}=\frac{OC}{\sin\angle 3}$$

$$=\frac{OC}{\sin\angle 4}=\frac{OD}{\sin\angle 5}=\frac{OD}{\sin\angle 6}$$

$$=\frac{DE}{\sin\angle 7}=\frac{OE}{\sin\angle 8}=\frac{OA}{\sin\angle 9},$$

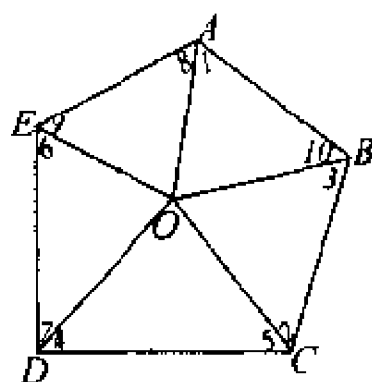


图 11－3

所以 $\sin\angle 9=\sin\angle 10$，$\angle 9$ 和 $\angle 10$ 相等或互补.

注 如何应用正弦定理，本例是富有启发的.

例 3 如图 11－4，在 $\triangle ABC$ 中，M 是 BC 边的中点，$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D，过 A、D、M 三点作圆，分别交 AB、AC 于 E、F 两点，求证：$BE=CF$.

分析 证明两线段相等的方法很多，我们先把 BE、CF 放在两三角形中考察，因 M 是 BC 中点，易想到连 EM、FM. 显见 $\triangle BME$，$\triangle CMF$ 不全等，然而若能证明 $\frac{BE}{BM}=\frac{CF}{CM}$，这也可达到目的.

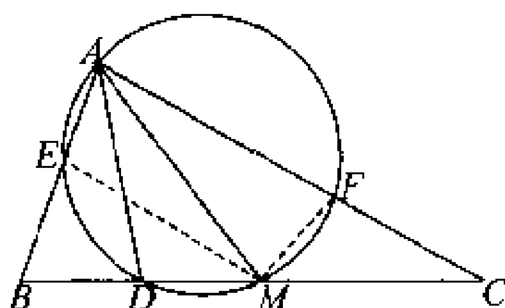


图 11－4

连 ME，MF. 因 $\angle BAD=\angle CAD$，又 $\angle BME=\angle BAD$，$\angle CMF=\angle CAD$.

所以 $\angle BME=\angle CMF$.

在 $\triangle BME$ 中，$$\frac{BE}{\sin\angle BME}=\frac{BM}{\sin\angle BEM},$$

在 $\triangle CMF$ 中，$$\frac{CF}{\sin\angle CMF}=\frac{CM}{\sin\angle CFM},$$

因 $\angle AFM+\angle AEM=180°$. 故

$$\begin{aligned}\sin\angle BEM&=\sin\angle AFM\\&=\sin(180°-\angle BEM)\\&=\sin\angle CFM.\end{aligned}$$

于是$\frac{BE}{BM}=\frac{CF}{CM}$,又 $BM=CM$,所以 $BE=CF$.

例4 如图 11－5,$ABCD$ 为圆内接四边形,过 AB 上一点 M 引 PM、MQ、MR 分别垂直于 BC、CD、DA,连接 PR 与 MQ 相交于 N.求证:$\frac{PN}{NR}=\frac{BM}{MA}$.

分析 比例式中四条线段不易直接发生联系.但 M、P、C、Q 四点共圆,M、R、D、Q 四点共圆.而四边形 $ABCD$ 本身内接于圆,可考虑运用正弦定理:设$\angle PMN=\angle 1$,$\angle RMN=\angle 2$,$\angle MNP=\angle 3$,$\angle MNR=\angle 4$.在$\triangle PNM$中,有$\frac{PN}{\sin\angle 1}=\frac{PM}{\sin\angle 3}$,在$\triangle RNM$中,有$\frac{NR}{\sin\angle 2}=\frac{MR}{\sin\angle 4}$.

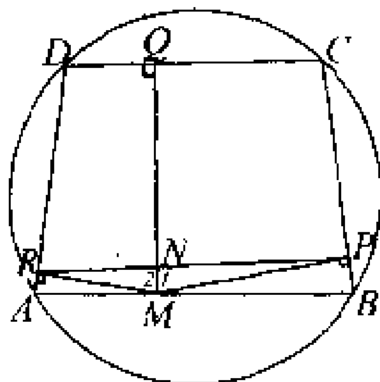


图 11－5

因 $PN=\frac{PM\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$, $NR=\frac{MR\sin\angle 2}{\sin\angle 4}$,而$\angle 3+\angle 4=180°$,有 $\sin\angle 3=\sin\angle 4$.所以$\frac{PN}{NR}=\frac{PM\sin\angle 1}{MR\sin\angle 2}$.

因 $MP\perp BC$,$MQ\perp CD$,$MR\perp AD$,故 M、P、C、Q 四点共圆,M、Q、D、R 四点共圆.可得 $\sin\angle 1=\sin\angle C$,$\sin\angle 2=\sin\angle D$.又 A、B、C、D 四点共圆,有 $\sin\angle C=\sin\angle A$,$\sin\angle D=\sin\angle B$,所以$\frac{PN}{NR}=\frac{PM\sin\angle C}{MR\sin\angle D}=\frac{PM\sin\angle A}{MR\sin\angle B}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBM$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle RAM$ 中,有 $PM=BM\sin\angle B$,$MR=MA\cdot\sin\angle A$.代入①,即得$\frac{PN}{NR}=\frac{BM}{MA}$.

例5 如图 11－6,在$\triangle ABC$ 中,$AB=33$,$AC=21$,$BC=m$,m 为整数,又在 AB 上可找到一点 D,在 AC 上可找到一点 E,使 $AD=DE=EC=n$,且 n 为整数,问 m 可取何值?

解 在$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 中

$$\cos A = \frac{33^2 + 21^2 - m^2}{2 \times 33 \times 21}$$

$$= \frac{n^2 + (21 - n)^2 - n^2}{2n(21 - n)},$$

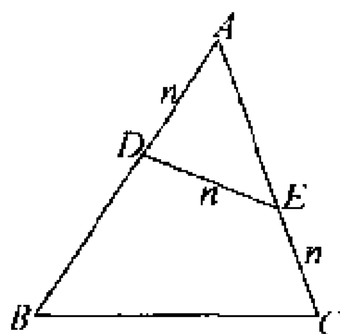


图 11－6

化简得

$$\frac{21 - n}{n} = \frac{1530 - m^2}{33 \times 21},$$

即 $$n(2223 - m^2) = 3^3 \times 7^2 \times 11. \quad ①$$

因 m,n 均为整数，故 n 为 $3^3 \times 7^2 \times 11$ 的因数，又 $EC < AC$，$AD + DE > AE$，故有 $7 < n < 21$. 于是 n 仅可能取 3^2 或 11.

当 $n = 3^2 = 9$ 时，由①解得 m 非整数，应舍去.

当 $n = 11$ 时，由①解得 $m = 30$.

所以，m 为 30.

例 6 扇形 OAB 的中心角为 45°，半径为 R，矩形 $PQMN$ 内接于扇形(如图 11－7)，求矩形的对角线长 l 的最小值.

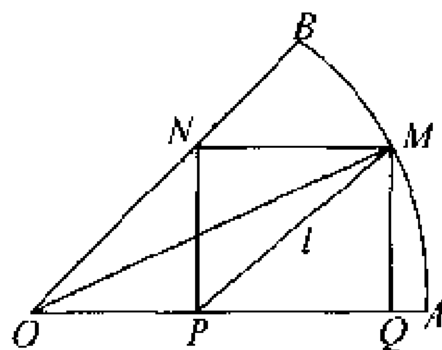


图 11－7

解 设 $\angle MOP = \theta$，$OP = x$. 依题设 $\angle NOP = 45°$，$\angle NPO = 90°$，所以 $OP = NP = MQ = x$，$OQ = \sqrt{OM^2 - MQ^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$. 在△$POM$ 中，根据余弦定理，有

$$PM^2 = OM^2 + OP^2 - 2OM \cdot OP\cos\angle MOP,$$

即 $$l^2 = R^2 + x^2 - 2R \cdot x \cdot \cos\theta.$$

又 $$\cos\theta = \frac{OQ}{OM} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R},$$

故 $$l^2 = R^2 + x^2 - 2Rx\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R},$$

$$= R^2 + x^2 - 2x\sqrt{R^2 - x^2},$$

于是 $$2x\sqrt{R^2 - x^2} = x^2 + R^2 - l^2.$$

两边平方得

$$4x^2(R^2 - x^2) = x^4 + 2x^2(R^2 - l^2) + (R^2 - l^2)^2,$$

$$5x^4 - 2(R^2 + l^2)x^2 + (R^2 - l^2)^2 = 0. \quad ①$$

设 x_1, x_2 为①的两根,则

$$\begin{cases} \Delta = 4(R^2 + l^2)^2 - 20(R^2 - l^2)^2 \geqslant 0, & ② \\ x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{2(R^2 + l^2)}{5} > 0, & ③ \\ x_1^2 \cdot x_2^2 = \dfrac{(R^2 - l^2)^2}{5} \geqslant 0. & ④ \end{cases}$$

③,④显然成立,由②得

$$(R^2 + l^2)^2 - 5(R^2 - l^2)^2 \geqslant 0,$$

$$[R^2 + l^2 + \sqrt{5}(R^2 - l^2)][R^2 + l^2 - \sqrt{5}(R^2 - l^2)] \geqslant 0,$$

在$\triangle POM$ 中,$\angle OPM$ 为钝角,有 $OM > PM$, $R > l$.故

$$R^2 + l^2 + \sqrt{5}(R^2 - l^2) > 0, \quad ⑤$$

$$R^2 + l^2 - \sqrt{5}(R^2 - l^2) > 0, \quad ⑥$$

由⑤,⑥得$(\sqrt{5}+1)l^2 \geqslant (\sqrt{5}-1)R^2$,有

$$l^2 \geqslant \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 R^2,$$

又 $l > 0$,所以 $l \geqslant \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$, $l_{\min} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

例 7 点 D 和 E 是$\triangle ABC$ 的边 BC 上的两点,使得$\angle BAD = \angle CAE$.又设 M 和 N 分别是$\triangle ABD$,$\triangle ACE$ 的内切圆与 BC 的切点.求证:$\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE}$.

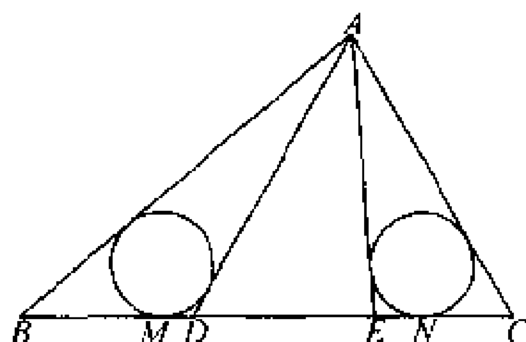


图 11 - 8

证明 如图 11 - 8,因$\dfrac{1}{MB} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{BD}{MB \cdot MD}$,$\dfrac{1}{NC} + \dfrac{1}{NE} = \dfrac{CE}{NC \cdot NE}$,故只须证明

$$BD \cdot NE \cdot NC = CE \cdot MB \cdot MD \quad ①$$

因为 M 和 N 分别为$\triangle ABD$,$\triangle ACE$ 的内切圆与 BC 的切点,故有 $MD=\frac{1}{2}(AD+BD-c)$,$MB=\frac{1}{2}(c+BD-AD)$,$NC=\frac{1}{2}(b+CE-AE)$,$NE=\frac{1}{2}(AE+CE-b)$.将上述各式代入①得

$$BD(AE+CE-b)(b+CE-AE)$$
$$=CE\cdot(c+BD-AD)\cdot(AD+BD-c),$$

即
$$BD(CE^2-b^2-AE^2+2b\cdot AE)$$
$$=CE(BD^2-c^2-AD^2+2c\cdot AD). \quad ②$$

记$\angle BAD=\angle CAE=\alpha$,在$\triangle ABD$,$\triangle ACE$ 运用正弦定理得$\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin B}$,$\frac{CE}{\sin\alpha}=\frac{AE}{\sin C}$,故

$$BD\cdot AE\cdot\sin B=CE\cdot AD\cdot\sin C,$$

即
$$b\cdot BD\cdot AE=c\cdot CE\cdot AD. \quad ③$$

将③代入②可知只须证明

$$BD(CE^2-b^2-AE^2)=CE(BD^2-c^2-AD^2). \quad ④$$

在$\triangle ABD$,$\triangle ACE$ 中运用余弦定理得

$$\frac{CE^2-b^2-AE^2}{b\cdot AE}=-2\cos\alpha=\frac{BD^2-c^2-AD^2}{c\cdot AD}. \quad ⑤$$

将③×⑤即得④式.

例 8 $\triangle ABC$ 是圆 O 的内接锐角三角形,连 AO、BO、CO 并延长分别交对边于 D、E、F,交圆 O 于D'、E'、F'.求证:$\frac{DD'}{AD}+\frac{EE'}{BE}+\frac{FF'}{CF}=1$.

分析 先从$\frac{DD'}{AD}$入手,稍作变化:

$$\frac{DD'}{AD}=\frac{R-OD}{R+OD}, \quad ①$$

转而着眼于 OD 与$\triangle ABC$ 的边、角间数量关系探索,如图 11-9,连接 CD'、BF'.在$\triangle OCD$ 中

$$OD=\frac{OC\sin\angle OCD}{\sin\angle ODC},$$

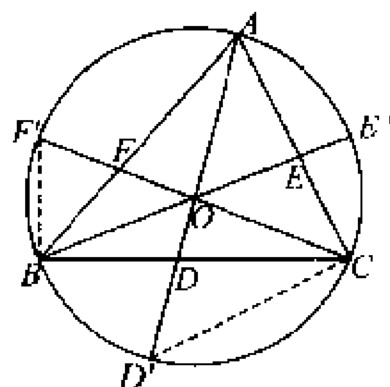


图 11－9

注意到 $\angle OCD=90°-\angle F'=90°-A$. $\angle ODC=B+\angle BAD=B+\angle BCD'=\angle B+90°-\angle ACB=90°+B-C$，所以

$$OD=\frac{R\sin(90°-A)}{\sin(90°+B-C)}=\frac{R\cos A}{\cos(B-D)}.$$

则 $$DD'=R-OD=\frac{2R\cos B\cos C}{\cos(B-C)},$$

$$AD=R+OD=\frac{2R\sin B\sin C}{\cos(B-C)},$$

有 $$\frac{DD'}{AD}=\frac{\cos B\cos C}{\sin B\sin C}=\cot B\cot C.$$

同理 $$\frac{EE'}{BE}=\cot C\cdot\cot A,\frac{FF'}{CF}=\cot A\cdot\cot B.$$

注意到一个熟知的事实，即在△ABC 中，有

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C.$$

即 $$\cot A\cdot\cot B+\cot B\cdot\cot c+\cot C\cdot\cot A=1.$$

所以 $$\frac{DD'}{AD}+\frac{EE'}{BE}+\frac{FF'}{CF}$$

$$=\cot B\cdot\cot C+\cot C\cdot\cot A+\cot A\cdot\cot B=1$$

例 9 AD,BE,CF 为△ABC 的内角平分线，D、E、F 在边上，如果 $\angle EDF=90°$，求 $\angle BAC$ 所有可能的值.

解 如图 11－10，设 $\angle EDA=\alpha$，$\angle ADF=\beta$，$\angle CDE=\gamma$，$\angle BDF=\delta$，$\angle AED=\theta$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$.

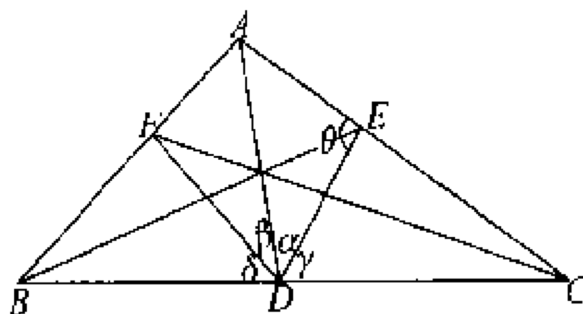


图 11－10

在△AED 中，根据正弦定理得

$$\frac{AE}{AD}=\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

同样，在△CDE 中

$$\frac{EC}{CD}=\frac{\sin\gamma}{\sin(180°-\theta)}=\frac{\sin\gamma}{\sin\theta}.$$

所以 $$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{CD}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\theta}. \quad ①$$

又因为 BE 为∠ABC 的平分线，有

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{BC}, \quad ②$$

由①，②式知

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD\cdot\sin\alpha}{CD\cdot\sin\gamma}. \quad ③$$

同理可得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\delta}. \quad ④$$

因 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，$\gamma+\delta=\frac{\pi}{2}$，故 $\sin\beta=\cos\alpha$，$\sin\delta=\cos\gamma$，代入③得

$$\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}. \quad ⑤$$

由③，⑤得

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}\cdot\frac{\sin\alpha\cdot\cos\gamma}{\sin\gamma\cdot\cos\alpha}. \quad ⑥$$

在△ABC 中，AD 为∠BAC 的平分线，有

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}. \quad ⑦$$

比较式⑥、⑦可得

$$\sin\alpha\cdot\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\sin\gamma,$$

即 $\sin(\alpha-\gamma)=0$. 所以 $\alpha=\gamma$. 可知 DE 是∠ADC 的平分线，有

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DC}. \quad ⑧$$

由②，⑧可得

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC},$$

即
$$\frac{2R\sin C}{2R\sin A}=\frac{2R'\sin C}{2R'\sin\frac{A}{2}},\qquad ⑨$$
其中 R,R'分别为△ABC,△ADC 外接圆半径.

化简⑨得 $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,有 $A=\frac{2\pi}{3}$.即为∠BAC 惟一可取的值.

练 习 十 一

一、选择题

1. △ABC 中,$b^2=ac$,则 $\sin B+\cos B$ 的取值范围是 ( ).

(A)$(1,\sqrt{2}]$　　(B)$[\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}]$

(C)$(0,\sqrt{2}]$　　(D)$(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$

2. △ABC 中,$\sin B=\sin C\cdot\cos A$,当 $c=10$ 时,a,b 恰为关于 x 的二次方程 $x^2-2(k+5)x+3(k+14)=0$ 的两个实根,则△ABC 的周长是 ( ).

(A)22　(B)24　(C)27　(D)48

3. 在△ABC 中,若 $\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\cos A+2\cos C}{\cos A+2\cos B}$,则△$ABC$ 必为 ( ).

(A)等腰直角三角形

(B)直角三角形

(C)等腰三角形或直角三角形

(D)锐角三角形

4. 若△ABC 的三边长为 a,b,c 同时满足 $a^4=b^4+c^4-b^2c^2$,$b^4=c^4+a^4-c^2a^2$,则△ABC 是 ( ).

(A)不等边三角形　(B)等边三角形

(C)直角三角形　(D)等腰直角三角形

5. 设 A,B,C 为三角形的三内角,且方程 $(\sin B-\sin A)x^2+(\sin A-\sin C)x+(\sin C-\sin B)=0$ 有等根,那么角 B 有 ( ).

(A) $B > 60°$　　(B) $B \geq 60°$

(C) $B < 60°$　　(D) $B \leq 60°$

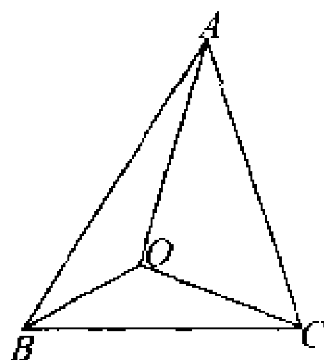
二、填空题

6. 已知$\angle XAY = 2\alpha$，P为$\angle XAY$平分线上的点，$AP = m$，过A、P两点任作一圆与$\angle XAY$交于B、C两点．则$AB + AC$的值是______．

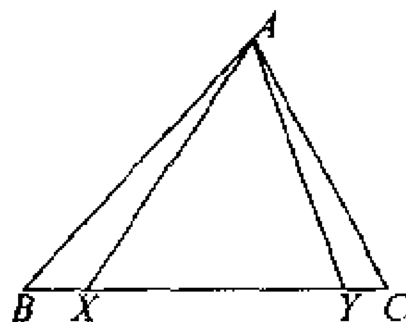
7. $\triangle ABC$的边长a,b,c是三个相邻的自然数，$a > b > c$，又$a = 2c\cos C$，则$\sin A:\sin B:\sin C =$________．

8. P是等边$\triangle ABC$内部一点，$\angle APB$、$\angle BPC$、$\angle CPA$的大小之比为5:6:7，则以PA、PB、PC的长为边的三角形的自小到大三个内角的比是________．

9. 如图，在$\triangle ABC$中，$AC = BC$，$\angle ACB = 80°$，O为$\triangle ABC$内一点，$\angle OAB = 10°$，$\angle ABO = 30°$，则$\angle ACO =$______．



(第9题)



(第10题)

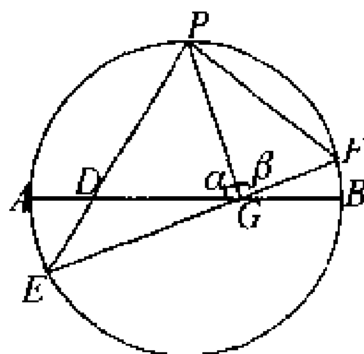
三、解答题

10. 自$\triangle ABC$的顶点引两条射线交BC与X，Y．并且满足$\angle BAX = \angle CAY$，如图，求证：$\frac{BX \cdot BY}{CX \cdot CY} = \frac{AB^2}{AC^2}$．

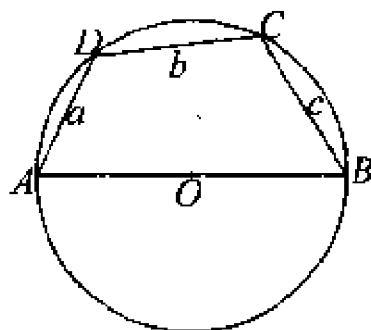
11. 如图，AB是圆O的直径，P是$\overset{\frown}{AB}$的中点，弦PE与直径AB交于D，在$\odot O$内取弦$PF = PD$，连EF与AB交于G．求证：$\angle PGD = \angle PGF$．

12. 已知圆内接四边形的一边为直径，其余三边长为a,b,c（如图所示）．试证明这个圆的直径是关于x的三次方程$x^3 - (a^2 + b^2 +$

$c^2)x-2abc=0$ 的根.

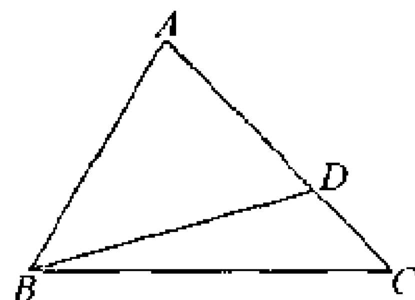


(第 11 题)



(第 12 题)

13. 如图,已知:D 是$\triangle ABC$ 的边 AC 上一点,且 $\frac{AD}{DC}=2$, $\angle C=45°$,且$\angle ADB=60°$. 求证:AB 是$\triangle BCD$ 的外接圆的切线.



(第 13 题)

14. 已知三角形 ABC 的三边 a,b,c 和三内角 A、B、C 满足条件:$\frac{c}{\cos\frac{C}{2}}=a\cdot\cot B+b\cdot\cot A$. 试判定该三角形的形状.

15. 一个三角形的三个内角的比为 1:2:4. 求证:角平分线与对边的(三个)交点是等腰三角形的三个顶点.

16. 在锐角$\triangle ABC$ 中,$AC=1$, $AB=c$, $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R\leqslant 1$,求证:$\cos A<c\leqslant 2\sin(A+\frac{\pi}{6})$.

第十二讲 平面 空间两直线的位置关系

知识点和方法述要

立体几何是研究空间图形的一个学科.

1. 平面的基本性质

公理 1 如果一条直线上的两个点在一个平面内,那么这条直线上的所有点都在这个平面内.

这时我们说直线在平面内,或者说平面经过直线.公理 1 是判定直线在平面内的依据.

公理 2 如果两个平面有一个公共点,那么它们有且仅有一条通过这个点的公共直线.

公理 2 是判定两平面相交、作两平面的交线、在空间判定点在直线上或多点共线的依据.

公理 3 经过不在同一直线上的三点有且只有一个平面.

根据公理 3 有以下三个推论:

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

推论 2 经过两条相交直线,有且只有一个平面.

推论 3 经过两条平行直线,有且只有一个平面.

2. (1)两条直线的位置关系如下表所示.

位置关系	是否共面	图示	公共点情况	记号
相交直线	在同一个平面内	a, b, p, α	有且仅有一个公共点	$a\cap b=P$

平行直线	在同一个平面内		没有公共点	$a /\!/ b$
异面直线	不在任何一个平面内		没有公共点	a、b 异面

两条直线的位置关系是空间图形中最简单、最基本的关系之一.空间任意两条直线无论是重合,或是相交,或是平行,均可归结为同一平面内的两条直线的位置关系,即为共面的位置关系(不作特别说明的“两条直线(平面)”,均指不重合的两条直线(平面)).不共面的两条直线的位置关系为异面直线,即两条直线在空间既不相交也不平行.异面直线的出现,使两条直线的位置关系从平面扩广到了空间.

(2)异面直线的判定:过平面外一点与平面内一点的直线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.

判定两条直线是否是异面直线常用上述判定定理与反证法.反证法是一种重要的证明方法,在立体几何中应用较多,运用反证法证明问题的一般步骤是:(ⅰ)假设原命题的反面成立;(ⅱ)从(ⅰ)的假设出发,利用题设条件,根据定义、公理、定理、公式等,经过逻辑推理导出某一结论;(ⅲ)指出(ⅱ)中推出的结论不合理,与题设矛盾,或与某定义、公理、定理、公式矛盾;(ⅳ)肯定原命题结论的反面不成立,即原命题的结论是正确的.

3. 平行直线

(1) **公理 4** 平行于同一条直线的两条直线互相平行.

(2) **等角定理** 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同,那么这两个角相等.

推论 如果两相交直线和另两条直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角(或直角)相等.

(3) 空间四边形的定义：四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形.

4. 两条异面直线所成的角

(1) 两条异面直线所成角的定义

直线 a,b 是异面直线，经过空间任意一点 O，分别引直线 $a' /\!/ a$，$b' /\!/ b$，则 a' 和 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a、b 所成的角.

若记 α 为异面直线 a、b 所成的角，则有 $0^\circ < \alpha \leqslant 90^\circ$.

(2) 根据两异面直线所成角的定义，通过平移将空间两异面直线的一种位置关系(所成角)转化为平面问题来处理.

等角定理证得了异面直线所成角的大小与所选的 O 点无关. 为了简便，点 O 常取在两异面直线中的一条上，也就是把异面直线中的一条平移到与另一条相交，进一步考虑则是把点 O 选在位于特殊位置的直线上或是具有特殊性质的点，常利用图中已有平行线、中位线，在已有空间图形内拼接图形，把某线段经平移后集中到同一个三角形中去，再进一步求角.

(3) 两条异面直线互相垂直的定义

如果两条异面直线所成的角是直角，则称这两条直线互相垂直.

(4) 两条异面直线的公垂线

和两条异面直线都垂直相交的直线叫做异面直线的公垂线.

根据定义，异面直线的公垂线与两异面直线必须垂直相交，有且仅有一条.

(5) 两条异面直线的距离

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做这两条异面直线的距离.

5. 空间想象能力是解立体几何问题一个至关重要的因素，点、线、面的基本位置关系及性质是研究立体几何的基础.

空间问题常可与平面几何有关问题进行类比或通过局部共面的

条件转化为平面几何问题来研究.但忌简单、不加区分地把平面问题照搬到空间.

6. 充要条件

如果有 A 就有 B,那么有 A 是有 B 的充分条件;如果有 B 就有 A(或无 A 则无 B),那么有 A 是有 B 的必要条件;如果有 A 就有 B 且有 B 就有 A,那么有 A 是有 B 的充分必要条件,简称充要条件.

例 题 精 讲

例 1 如图 12-1,已知直线 l 和直线 l_1,l_2,l_3 分别相交于点 A,B、C,且 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$.求证:直线 l,l_1,l_2,l_3 共面.

证明 因 $l \cap l_1 = A$,故 l_1,l 确定一个平面 α.又 $l_2 /\!/ l_1$,故 l_2,l 确定一个平面 β.

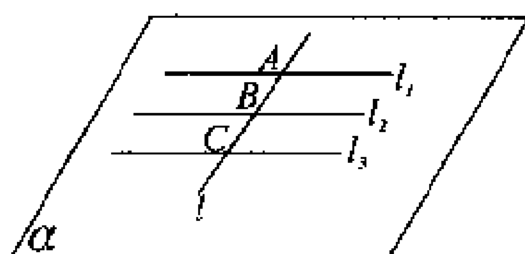


图 12-1

因平面 β 内的直线 l_1 及 l_1 外的点 B 也在平面 α 内,所以平面 β 即平面 α.

所以 $l_2 \subset \alpha$.

同理 $l_3 \subset \alpha$.

直线 l,l_1,l_2,l_3 都在平面 α 内.

注 1 证明点、直线共面常用方法.

(1) 先由给定的点和直线中的某些元素确定一个平面,再证其余元素在这个平面内.

(2) 先说明某些元素共面,其余元素也共面,再证明两平面其实是同一个平面(或重合).

2 由例 1 可知无数条平行直线与直线 l 相交,这些直线连同 l 共面,其中 l_2 具有一般性,即它是无数条与 l_1 平行的直线的代表.

例 2 $\triangle ABC$ 和$\triangle A_1B_1C_1$ 分别在平面 α,β 内,$\alpha \cap \beta = a$,AA_1,BB_1,CC_1 相交于点 O,且 $AB \cap A_1B_1 = P$,$BC \cap B_1C_1 = Q$,$AC \cap A_1C_1$

$=R$,求证:P,Q,R 都在 a 上.

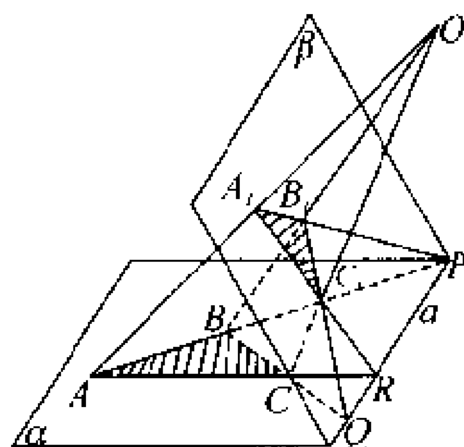


图 12-2

证明 如图 12-2,由 $AB\cap A_1B_1=P$,A、$B\in\alpha$,故 $P\in\alpha$,同理 $P\in\beta$.所以,$P\in\alpha\cap\beta$,即 $P\in a$.同理 Q、$R\in a$.故 P、Q、R 都在直线 a 上.

注 在空间证明点共线,常利用公理 2,证明这些点在两平面相交线上.

例 3 如图 12-3,直线 a、b 是异面直线,A、B、C 为直线 b 上三点,D、E、F 为直线 a 上三点,A'、B'、C'、D'、E'分别为 AD、DB、BE、EC、CF 的中点.求证:

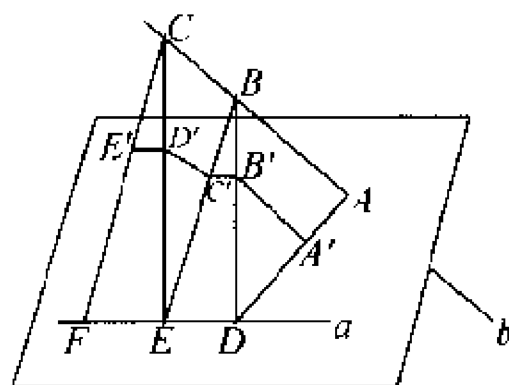


图 12-3

(1) $\angle A'B'C'=\angle C'D'E'$;

(2) A'、B'、C'、D'、E' 共面.

证明 (1) 因 A',B'是 AD,DB 的中点,故 $A'B'/\!/b$.同理 $C'D'/\!/b$.于是 $A'B'/\!/C'D'$.

同理 $B'C'/\!/D'E'$.

因$\angle A'B'C'$的两边和$\angle C'D'E'$的两边平行且方向相同,所以$\angle A'B'C'=\angle C'D'E'$.

(2) 因 $A'B'/\!/C'D'$,故 A'、B'、C'、D'共面.同理 B'、C'、D'、E'共面,因 a、b 异面,所以 B'、C'、D'三点不共线,于是 A'、B'、C'、D'、E'共面.

例 4 如图 12-4,M、N 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中棱 AD、AA_1 的中点,求 AC 与 MN 所成的角.

分析一 观察图形 12-4,可发现 $B_1C/\!/MN$.事实上,连接 B_1C、A_1D.因为 $A_1B_1 \underline{\underline{/\!/}} AB$,$DC \underline{\underline{/\!/}} AB$,故 $A_1B_1 \underline{\underline{/\!/}} DC$,四边形 A_1B_1CD 是平行四边形,从而 $B_1C/\!/A_1D$.又 M、N 是 AD、AA_1 的中点,所以 $MN/\!/A_1D$.根据公理 4,$MN/\!/B_1C$,$\angle ACB_1$ 即是异面直线 AC 与 MN 所成的角.

连 AB_1,则 $AB_1 = B_1C = AC$,$\triangle ACB_1$ 是等边三角形,所以 $\angle ACB_1 = 60°$,异面直线 AC 与 MN 所成角为 $60°$.

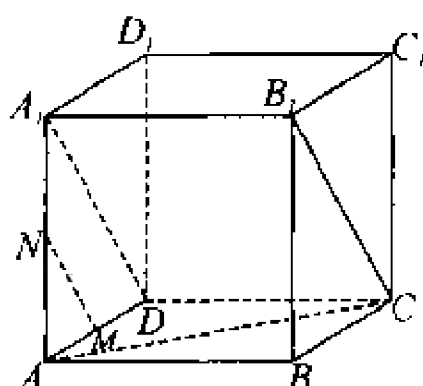


图 12-4

分析二 如图 12-5,在原立方体的旁边拼接一个正方体,E,F 为 AA',CD 中点,易见 $EM \parallel AC$. $\triangle EMN$ 为等边三角形,$\angle EMN = 60°$,即为异面直线 AC 与 MN 所成的角.

例 5 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,点 A 关于直线 A_1C, BD_1 的对称点分别为 P、Q.求 P、Q 两点间的距离(注正方体的对角面如四边形 A_1ACC_1 为矩形).

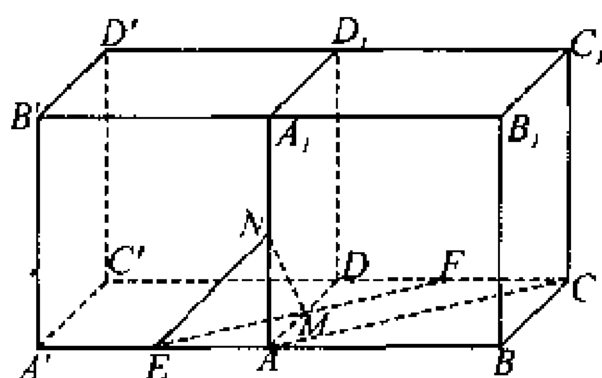


图 12-5

分析 连结 AP、AQ,分别交 A_1C、BD_1 于 M、N(如图 12-6).则 $AP \perp A_1C$,$AQ \perp BD_1$,且 M、N 分别为 AP、AQ 的中点.从而,$MN = \frac{1}{2}PQ$.

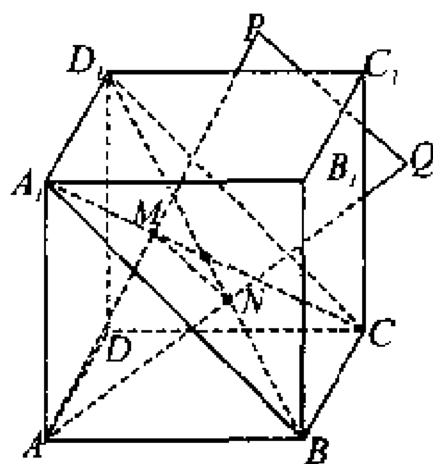


图 12-6

在 Rt$\triangle AA_1C$ 中,由 $AA_1^2 = A_1M \cdot A_1C$,$A_1C = \sqrt{3}A_1A$,可知 $A_1M = \frac{1}{3}A_1C$.

同理 $BN = \frac{1}{3}BD_1$.

设 A_1C 与 D_1B 交于点 O,则

$$OM = \frac{1}{2}A_1C - \frac{1}{3}A_1C$$

$$= \frac{1}{6}A_1C = \frac{1}{3}OA_1.$$

同理 $ON = \frac{1}{3}OB$.

于是，在矩形 A_1BCD_1 中，$MN=\frac{1}{3}A_1B=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 进而有 $PQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，即为所求.

例 6 空间四边形的两组对边分别相等的充要条件是它的两条对角线的中点连线垂直于两对角线.

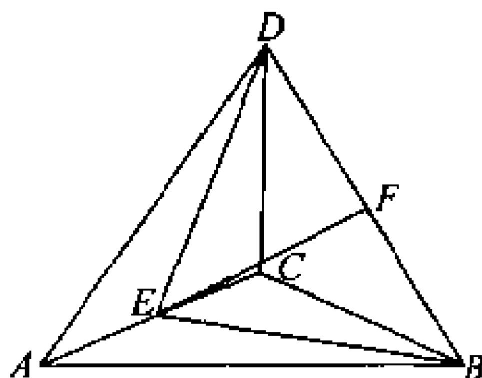


图 12 - 7

分析一 如图 12 - 7，设空间四边形为 $ABCD$，E、F 分别为 AC、BD 中点.

必要性易证. 由 $AB=CD$，$BC=AD$，可得 $\triangle ABC\cong\triangle CDA$，$BE=DE$，所以 $EF\perp BD$. 同理，$EF\perp AC$，必要性获证.

以下考虑充分性. 一时正向难以展开，尝试用反证法.

假设 $AB>CD$，由 $EF\perp BD$ 且 $BF=FD$ 得 $EB=ED$. 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle CDE$ 中，由 $AE=EC$，$EB=ED$，$AB>CD$ 可得 $\angle AEB>\angle CED$，于是 $\angle CEB<\angle AED$，于是 $BC<AD$.

由 $EF\perp AC$ 且 $AE=EC$ 得 $AF=CF$. 在 $\triangle ABF$ 及 $\triangle CDF$ 中，$BF=FD$，$AF=CF$，$AB>CD$，可得 $\angle AFB>\angle CFD$，于是 $\angle AFD<\angle CFB$，$AD<BC$，这与前面推出的结论 $BC<AD$ 矛盾. 同样可知 $AB<CD$ 也不成立，所以 $AB=CD$. 同理可证 $BC=AD$.

分析二 注意到图形所具有的对称特点：EF 是 AC 和 BD 的中垂线，可将整个图形以 EF 为轴旋转 $180°$，必交换 A 和 C，B 和 D 的位置，从而 $AB=CD$，$AD=CB$.

例 7 已知空间四边形 $ABCD$ 中，$AD=BC=a$，$AC=BD=b$，$AB\cdot CD=c^2$，对于空间中任意一点 P，令 $S_P=AP+BP+CP+DP$. 求 S_P 的最小值.

解 令 $m=AB$，$n=CD$，依题设 $mn=c^2$. 设 M、N 为 AB、CD 的中点. 因 $AD=BC$，$AC=BD$，故 $\triangle ADB\cong\triangle BCA$，$\triangle CAD\cong\triangle DBC$，有 $CM=DM$，$AN=BN$，则点 A、B 和点 C、D 关于线段 MN 对称，如图 12

-8.

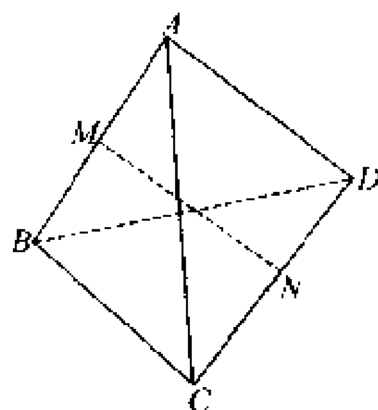


图 12-8

设 P' 是点 P 关于 MN 的对称点,则

$$S_p = AP + AP' + CP + CP',$$

若 Q 为 PP' 与 MN 的交点,则 $2AQ \leqslant AP + AP'$,$2CQ \leqslant CP + CP'$,故

$$S_Q = 2(AQ + CQ) \leqslant S_P.$$

将 AB 绕 MN 旋转得到平面 CDM 上的线段 $A'B'$,点 A' 和 C 位于 MN 的异侧.对于 MN 上任意一点 Q,有 $A'Q = AQ$,所以

$$S_P \geqslant S_Q = 2(A'Q + CQ) \geqslant 2A'C.$$

当 P 为 $A'C$ 与 MN 的交点 Q_0 时取等号,故 $S_{P_{\min}} = 2A'C$.

在$\triangle DAC$ 中,

$$\begin{aligned}4AN^2 &= 2(AD^2 + AC^2) - CD^2 \\ &= 2(a^2 + b^2) - n^2,\end{aligned}$$

因此,有

$$4MN^2 = 4(AN^2 - AM^2) = 2(a^2 + b^2) - (m^2 + n^2),$$

考察梯形 $A'B'CD$,$MQ_0 : Q_0N = m : n$,因此,有

$$\begin{aligned}2A'Q_0 &= \sqrt{4A'M^2 + 4MQ_0^2} \\ &= \sqrt{m^2 + \left(\frac{m}{m+n}\right)^2[2(a^2 + b^2) - (m^2 + n^2)]} \\ &= \frac{m}{m+n}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.\end{aligned}$$

类似地,有

$$2Q_0C = \frac{n}{m+n}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

所以

$$S_{P_{\min}} = 2A'C = 2(A'Q_0 + Q_0C) = \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

即为所求.

练 习 十 二

一、选择题

1. 已知 E、F、G、H 为空间中的四个点，设命题甲：点 E、F、G、H 不共面，命题乙：直线 EF 和 GH 不相交，那么甲是乙的 (　　).

(A)充分条件但不是必要条件

(B)必要条件但不是充分条件

(C)充分且必要条件

(D)既不是充分条件也不是必要条件

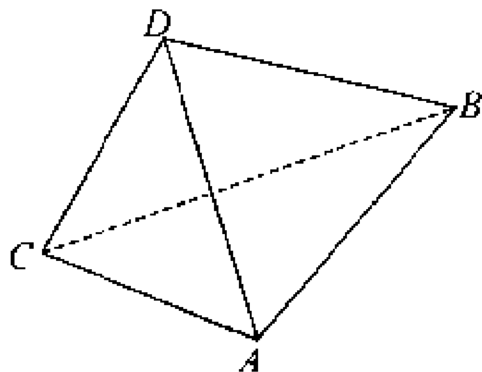
2. a、b 是异面直线，直线 c 与 a 所成的角等于 c 与 b 所成的角，这样的直线 c (　　).

(A)有 1 条　　(B)不超过 3 条

(C)有无穷多条　　(D)恰有 1992 条

3. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，$AB:CD=\sqrt{2}:1$，AB 与 CD 所成的角为 $45°$，E、F 分别是 AD、BC 的中点，则 EF 与 AB 所成的角等于 (　　).

(A)$90°$　(B)$60°$　(C)$45°$　(D)$30°$



(第 3 题)

4. 将棱长为 5 的正方体锯成棱长为 1 的 125 个小正方体，锯 12 次可达到目的，请你想法尽可能少锯几次，那么至少需要锯 (　　).

(A)7 次　(B)8 次　(C)9 次　(D)10 次

5. 空间有折线 $ABCD$，$\angle ABC=120°$，$\angle BCD$ 在 $0°$和 $60°$之间(也可以是 $0°$或 $60°$)，已知 $|AB|=|BC|=a$，$|CD|=b(a>b>0)$，则 A、D 两点的最近距离是 (　　).

(A)$\sqrt{3a^2+b^2-\sqrt{3}ab}$　　(B)$\sqrt{3a^2+b^2-2\sqrt{3}ab}$

(C)$\sqrt{3a^2+b^2-3ab}$　　　(D)$\sqrt{3a^2+b^2-3\sqrt{3}ab}$

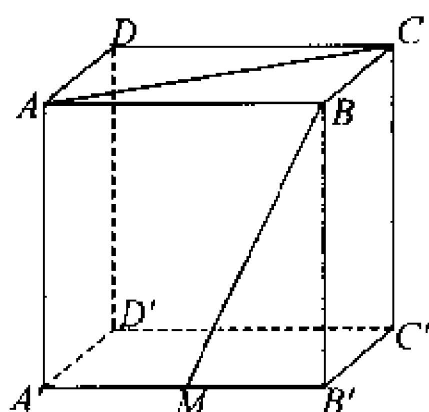
二、填空题

6. 直线 a,b 交于 P 点，a、b 成 $60°$角，过 P 点与 a、b 都成 $60°$的角的射线为 PC，则射线 PC 的数目是________.

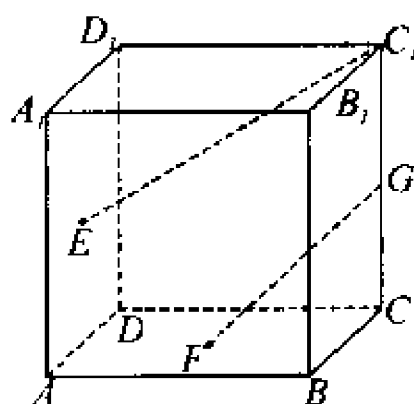
7. 空间四边形 $ABCD$ 的一组对边 BC、AD 的长分别为 6,4，且夹角为 $60°$，则连结对角线 AC、BD 中点的线段长为________.

8. 如图，在正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，M 是$A'B'$ 的中点，异面直线 AC 与 BM 所成角的余弦值为________.

9. 在空间四边形 $ABCD$ 中，对角线 $BD=6cm$，$AC=4cm$，且 $BD\perp AC$，M、N、P、Q 分别是四边上的点，如果 $BM:MA=BN:NC=DQ:QA=DP:PC=2:1$，则四边形 $MNPQ$ 的面积为________.



(第 8 题)



(第 10 题)

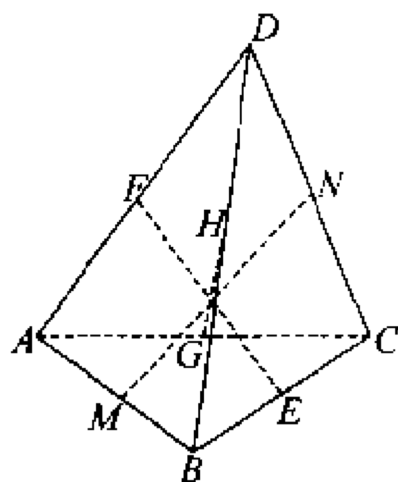
10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是正方形 ADD_1A_1、$ABCD$ 的中心，G 为 CC_1 的中点，设 GF 与 AB 所成的角为 α，C_1E 与 AB 所成的角为 β，则 $\alpha+\beta=$________.

三、解答题

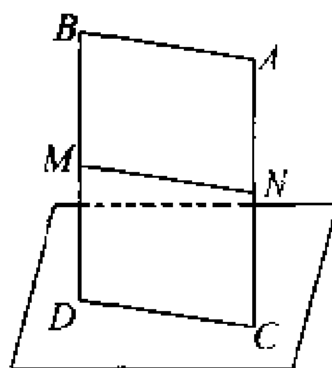
11. 已知$\triangle ABC$ 在平面 α 外，它的三边所在直线分别交 α 于 P、Q、R，求证：P、Q、R 在同一条直线上.

12. 一条直线和这条直线外不在同一直线上三点可确定多少个平面？试说明理由.

13. 如图，M、N、E、F、G、H 分别是 AB、CD、BC、AD、AC、BD 的中点.求证：EF、GH 和 MN 三线共点.



(第 13 题)



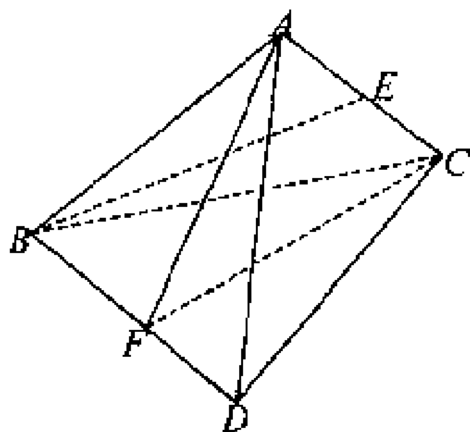
(第 14 题)

14. 如图，AB 和 CD 是两异面直线，BD 是它们的公垂线，$AB=CD$，M 是 BD 的中点，N 是 AC 的中点.

(1) 求证：$MN\perp AC$；

(2) 当 $AB=CD=a$，$BD=b$，$AC=c$ 时，求 MN 的长.

15. 如图，空间四边形 $ABCD$ 中，E 是 AC 中点，AF 是 BD 上的高，$BD=BE=CF=1$，$AB=AD=\frac{3}{2}$，试求异面直线 BE、CF 所成角.



(第 15 题)

第十三讲 空间直线和平面

知识点和方法述要

1. 直线与平面位置关系如下表所示：

位置关系		图示	记号	公共点个数
直线在平面内			$l\subset\alpha$	有无数个公共点
直线在平面外	直线和平面相交		$l\cap\alpha=O$	有且只有一个公共点
	直线和平面平行		$l/\!/\alpha$	没有公共点

2. (1) 直线和平面平行的判定定理

如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

这里要抓住判定定理中的“内”“外”两关键字眼，不能只注意线线平行，否则会出现判断错误.

(2) 直线和平面平行的性质定理

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

3. (1) 直线和平面垂直的定义

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，则称这条直线和这个平面互相垂直. 直线叫做平面的垂线，平面叫做直线的垂面.

过一点有且只有一条直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直. 平面的垂线和平面一定相交，交点叫做垂足.

(2)直线和平面垂直的判定定理与性质定理

类 别	图 示	条 件	结 论
判 定		$a\perp b, a\perp c$, $b\subset\alpha, c\subset\alpha$, $b\cap c=O$	$a\perp\alpha$
		$a /\!/ b$ $b\perp\alpha$	

性质	图形	条件	结论
性　质		$a\perp\alpha$ $b\subset\alpha$	$a\perp b$
		$a\perp\alpha$ $b\perp\alpha$	$a/\!/b$

(3) 点到平面距离的定义

从平面外一点引平面的垂线，这个点和垂足间的距离叫做这个点到这个平面的距离.

(4) 直线和平面的距离的定义

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做这条直线和平面的距离.

4. 常运用以下重要转化：

线线平行(垂直)$\Longleftrightarrow$线面平行(垂直).

5. (1) 定义

自一点向平面引垂线，垂足叫做这点在这个平面上的射影，这个点与垂足间的线段叫做这点到这个平面的垂线段.

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点叫做斜足，斜线上一点与斜足间的线段叫做这点到这个平面的斜线段.

过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影，垂足与斜足间的线段叫做这点到平面上的斜线段在这个平面上的射影.

因过一直线的一组平行线共面(见第十二讲例1),故斜线上任意一点在平面上的射影,一定在斜线的射影上.

(2) 斜线长定理

从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中:

(i) 射影相等的两条斜线段相等,射影较长的斜线段也较长;

(ii) 相等的斜线段的射影相等,较长的斜线段的射影也较长;

(iii) 垂线段比任何一条斜线段都短.

(3) 直线和平面所成角的定义

平面的一条斜线和它的平面内的射影所成的锐角,叫做斜线与平面所成的角;一条直线垂直于平面,规定所成角为直角;一条直线与平面平行,或在平面内,规定所成角为$0°$的角.

求直线与平面所成角的一般步骤是先找出或作出斜线与射影所成的角,再论证所找到的(或所作)的角即为所求的角.再解三角形计算,最后得到结论.

记直线与平面所成的角为α,则$0°\leqslant\alpha\leqslant90°$.

(4) 最小角定理

斜线与平面所成的角,是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角.

6. (1) 三垂线定理

在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线的射影垂直,那么它也和这条斜线垂直.

(2) 三垂线定理的逆定理

在平面内的一条直线,如果和这个平面的一条斜线垂直,那么它也和这条斜线的射影垂直.

如图13-1,三垂线定理及其逆定理涉及到一个平面、四条垂线:平面的垂线PA、平面的斜线PB、斜线在平面内的射影、平面内的一条直线,"三垂"关系指的是,垂线PA与平面α的垂直关系;射影AB与直线a的垂直关系;斜线PB与直线a的垂直关系.

关键在于平面内的一条直线垂直于平面的斜线及其射影所确定

的平面，其中射影位置的确定又依赖于平面的垂线．三垂线定理用于判定平面内直线和平面的斜线（平面外直线）垂直的位置关系；三垂线定理的逆定理则是利用平面的斜线来判定平面内二直线（其一为该斜线在平面内的射影）的垂直关系．它们是在“线面”垂直基础上得到两个“线线”垂直的重要判定定理．

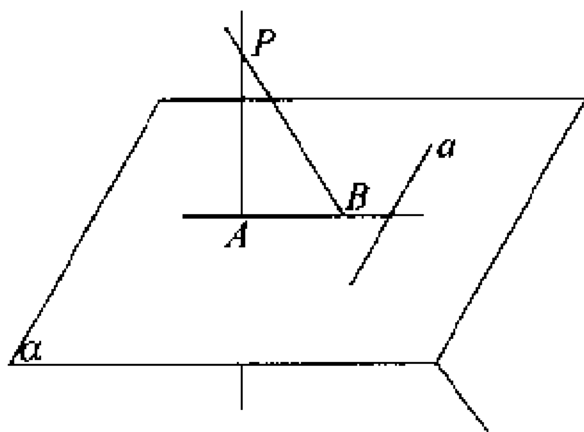


图 13－1

例 题 精 讲

例 1 已知三个平面两两相交，有三条交线，求证这三条直线或交于一点或互相平行．

分析 设 $\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$．欲证 a,b,c 交于一点或 $a/\!/b/\!/c$，首先考察其中两条直线的位置情形：$b\subset\gamma$，$c\subset\gamma$，则

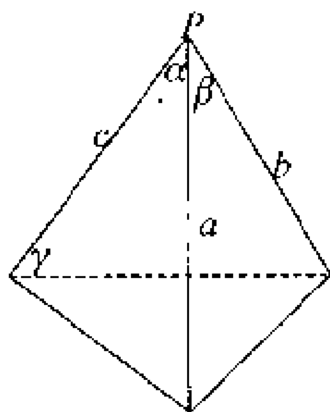


图 13－2

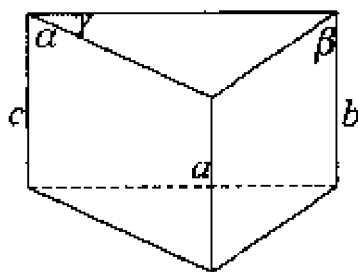


图 13－3

（i）如图 13－2，若 b,c 相交，设 $b\cap c=P$．因 $c\subset\alpha$，$b\subset\beta$，故 $P\in\alpha$，$P\in\beta$，从而 $P\in\alpha\cap\beta$，$P\in a$．故 a,b,c 交于点 P．

（ii）如图 13－3，若 $b/\!/c$，$b\in\beta$，则 $c/\!/\beta$．又 $a\subset\alpha$，$c\subset\alpha$，所以 $c/\!/a$．根据公理四，$a/\!/b/\!/c$．

注 例 1 的结论有助于利用第三个平面确定两平面交线的位置．

例 2 边长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱 CB 的中点为 M，求直线 A_1M 和平面 ABC_1D_1 所成的角的大小.

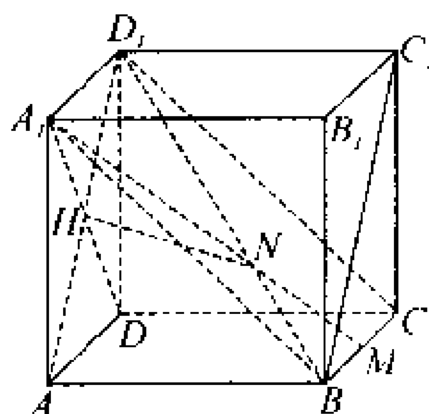


图 13-4

分析 如图 13-4，A_1M 在平面 A_1D_1CB 上. 平面 ABC_1D_1 与平面 A_1D_1CB 的交线为 D_1B，N 是 A_1M 与 BD_1 的交点，N 也是 A_1M 与平面 ABC_1D_1 的交点.

设 A_1D 与 AD_1 交于 H，由于 $A_1D\perp AD_1$，$AB\perp A_1D$，故 A_1D 垂直平面 ABC_1D_1 于 H，$\angle A_1NH$ 即为 A_1M 与平面 ABC_1D_1 所成的角.

因 $BM /\!/ A_1D_1$，故

$$\frac{A_1N}{NM}=\frac{A_1D_1}{BM}=2,$$

故 $A_1N=\frac{2}{3}A_1M$，有

$$A_1N=\frac{2}{3}A_1M=\frac{2}{3}\sqrt{A_1B^2+BM^2}$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}=2.$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1HN$ 中，$A_1H=\sqrt{2}$，于是

$$\sin\angle A_1NH=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以，$\angle A_1NH=45°$，即为所求.

例 3 已知一平面与一个正方体的 12 条棱所成的角都等于 α，试求 $\sin\alpha$ 的值.

分析 根据线与面所成角的定义，一平面与正方体的所有棱成等角等价于该平面与交于同一顶点的三条棱成等角.

如图 13-5，平面 BCD 与正方体共顶点 A 的三条棱所成角均相等。过 A 点作 $AH\perp$ 平面 BCD，则 H 为 $\triangle BCD$ 的中心. 连 DH，$\alpha=\angle ADH$.

设正方体棱长为 a,易知

$$DH=\frac{2}{3}\times\sqrt{2}a\sin60^{\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

进而有 $AH=\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{6}}{3}a)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$

故 $\sin\alpha=\sin\angle ADH=\frac{AH}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

即为所求.

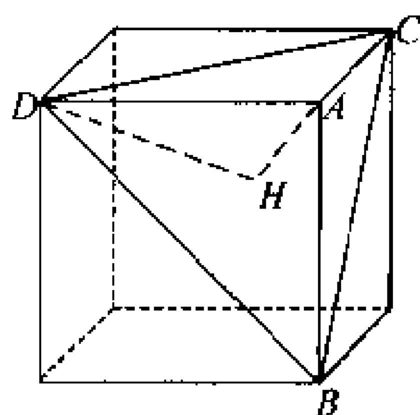


图 13－5

例 4 设 l,l' 为空间中的两条直线. 在 l 上取 A、B、C 三点,B 为线段 AC 中点,若 a、b、c 分别为 A、B、C 到 l' 的距离,证明

$$b\leqslant\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}},$$

当且仅当 $l/\!/l'$ 时等式成立.

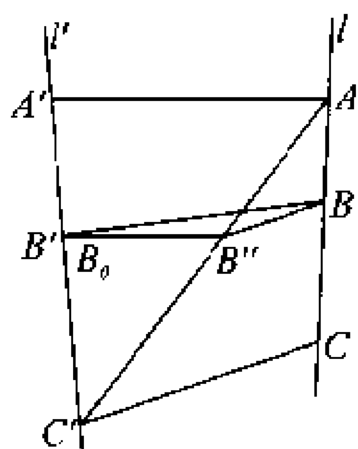


图 13－6

证明 如图 13－6,设 A',B',C' 分别为 A,B,C 在 l' 上射影. 连接 AC',取 AC' 中点 B'',$A'C'$ 中点 B_0,则 $BB''/\!/CC'$,$B_0B''/\!/AA'$. 因 $A'C'\perp CC'$,$A'C'\perp AA'$,故 $A'C'\perp BB''$,$A'C'\perp B_0B''$. 可知 $l'\perp$ 平面 $B_0B''B$,有 $l\perp B_0B'$. B_0 与 B' 重合. 即知 B 在 l' 上的射影 B' 是线段 AC 的射影 $A'C'$ 的中点,$B'B''=\frac{a}{2}$,$BB''=\frac{c}{2}$. 在 $\triangle B'B''B$ 中,

$$BB'\leqslant BB''+B'B'',$$

即
$$b\leqslant\frac{a}{2}+\frac{c}{2}.$$

等号成立当且仅当 B'' 在线段 BB' 上.

$$1]\ \text{又}(a+c)^2\leqslant 2(a^2+c^2),$$

故
$$b\leqslant\sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}.$$

等号成立当且仅当 $a=c$,且 B'' 在线段 BB' 上,从而 BB'' 与 $B'B''$ 共线,即 l 与 l' 共面,$AA'/\!/CC'$,等价于 $l/\!/l'$,命题获证.

例 5　如图 13－7，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=3$，$AC=4$，PA 是平面 ABC 的斜线段，且 $\angle PAB=\angle PAC=60°$.

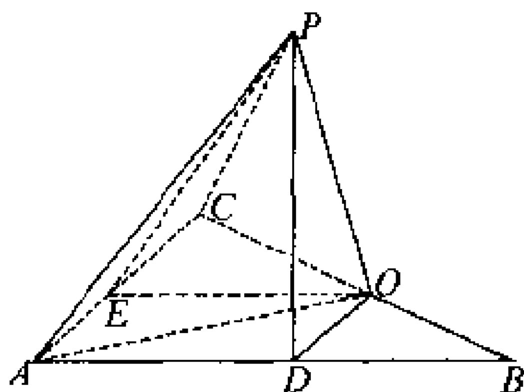


图 13－7

(1) 求 PA 与平面 ABC 所成的角.

(2) PA 的长等于多少时，点 P 在面 ABC 上的射影 O 恰好落在 BC 上.

解　(1) 作 $PO\perp$ 平面 ABC，垂足为 O，连接 AO，AO 即为斜线 AP 在平面 ABC 内射影，$\angle PAO$ 为 PA 与平面 ABC 所成的角.

过 O 在平面 ABC 内作 $OD\perp AB$，$OE\perp AC$，垂足分别为 D、E. 连接 PD，PE. 根据三垂线定理知 $PD\perp AB$，$PE\perp AC$.

在 Rt△APD 与 Rt△APE 中，PA 公共，$\angle PAB=\angle PAC$，故 Rt△APD∽Rt△APE，可得 $PD=PE$，进而可得 $OD=OE$，所以 AO 在 $\angle BAC$ 的平分线所在直线上.

不妨令 $AP=2$. 因 $\angle PAB=60°$，所以 $AD=\frac{1}{2}AP=1$. 因 $\angle BAC=90°$，故 $AO=\sqrt{2}AD=\sqrt{2}$. 于是，

$$\cos\angle PAO=\frac{AO}{AP}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

所以 PA 与平面 ABC 所成角为 45°.

(2) 因 $OD /\!/ AC$，又 $AD=OD$，故

$$\frac{OD}{AC}=\frac{BA-AD}{AC}=\frac{BA-OD}{AB}. \qquad ①$$

因 $AB=3$，$AC=4$，故由①可得 $OD=\frac{12}{7}$. 进而又有 $AO=\sqrt{2}OD=\frac{12\sqrt{2}}{7}$，$PA=\sqrt{2}AO=\frac{24}{7}$.

当 $PA=\frac{24}{7}$ 时，点 P 在平面 ABC 上的射影 O 恰好落在 BC 上.

注 1.在例5(1)的解答中,实际上证明了命题:"经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线.如果斜线和这个角两边的夹角相等,那么斜线在平面上的射影是这个角的平分线所在的直线."这个命题和另一命题:"如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等,那么这个点在平面上的射影在这个角的平分线上."都有助于判定平面的斜线在平面上的射影的位置,常为分析问题、解决问题提供了方便.上述两命题的逆命题也是成立的,三垂线定理及其逆定理则可看作特例.

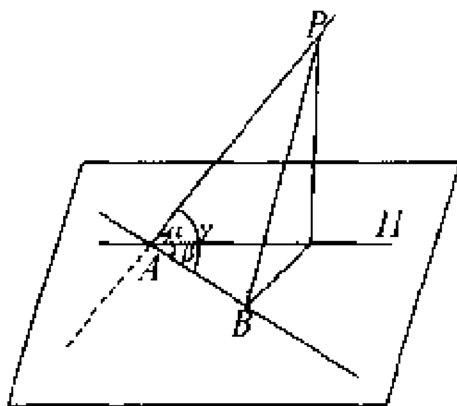


图 13-8

2.如图13-8,AH 为平面 ABH 的斜线 AP 在平面内的射影,AB 为过斜足 A 的直线,斜线 AP 与平面所成的角为 α,与 AB 所成角 γ,AH 与 AB 所成角 β,类似例5(1)通过构造 Rt$\triangle AHP$、Rt$\triangle ABP$、Rt$\triangle ABH$,将空间图形转化为平面图形,易得 $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos\gamma$.

例6 空间给定一正方形 $ABCD$,求满足下述条件的点 P 的集合:$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 都是等腰三角形.

解 注意到对称性,只须考虑三种情形:

(i) 若 $PA=PB$,$PB=PC$.易知 P 在 AB 中垂面上,同时又在 BC 的中垂面上,即点 P 的集合为过正方形中心且垂直平面 AC 的一条直线(此时显然 $PC=PD$,$PD=PA$).

(ii) 若 $PA=PB$,$PB\neq PC$.易知 P 在 AB 的中垂面上,但不在 BC 的中垂面上,有 $PC=PD$,$PD\neq PA$.又 $\triangle PBC$、$\triangle PDA$ 为等腰三角形,故 PA、PB、PC、PD 中至少有两个等于 AB.而不可能是 PA、PC.否则 $PA=PC=PD$,矛盾.不失一般性,令 $PA=PB=AB$,则此时 P 在以 AB 中点为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{2}AB$ 为半径,位于 AB 中垂面的圆上由对称性知此时点 P 的集合有四个以各边中点为圆心,$\frac{\sqrt{3}}{2}AB$ 为半径且位于

该边中垂面上的圆(除去位于邻边中垂面上的点).

(iii) 若 $PA \neq PB$, $PC \neq PB$,则 $PB \neq PC$, $PD \neq PA$,又 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PDA$ 均为等腰三角形,若 $PA = AB$,则 $PC = BC$,有 $PA = PC$;若 $PA \neq AB$,则有 $PB = BC$,同理有 $PB = PD$. 根据对称性,不妨设 $PA = PC$, P 在 AC 的中垂面上,且与点 A 的距离等于 AB 的圆上(除去过正方形中心,垂直正方形所在面上的直线 l 上两点). 类似地点 P 还在一个位于 BD 中垂面上与点 B 距离等于 AB 的圆. 因此,点 P 集合为两个圆(除去上述直线 l 上的点).

上述一条直线,六个圆即为所求点 P 集合.

例 7 正方形 $ABCD$ 的边长为 3, E 在 AB 边上,且 $AE = 1$. 甲、乙两人做如下游线:甲先在线段 BE 上选一点 X,然后乙在 BC 边上选一点 Y,再将此正方形沿 DX、DY 折起,使 A, C 重合于 A' 点(图 13-9). 甲力争使 $A'D$ 与平面 DXY 所成角尽可能小,乙力争使这个角尽可能大,如果两人都采取了正确的策略. 游戏停止后,求 $A'D$ 与平面 DXY 所成角的正切值,并求此时 X、Y 点的位置.

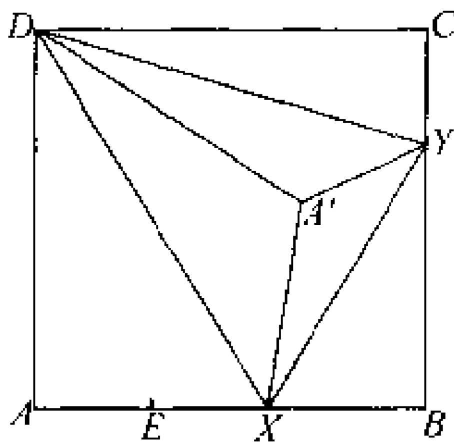


图 13-9

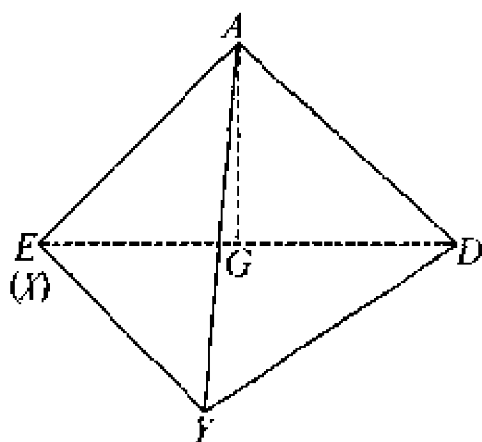


图 13-10

分析 当 X 点取定后(图 13-10), $\angle A'DX$ 一定,由最小角定理, $A'D$ 与平面 DXY 所成角 θ 总小于或等于 $\angle A'DX$,因此乙为了使 θ 角尽可能大,总可以适当选取 Y 点,使平面 $A'DX$ 与平面 DXY 垂直,

即使$\angle A'DX=\theta$.而甲为了使θ角尽可能小,只需使$\angle A'DX$尽可能小,因此X点应取在E点处,此时

$$\tan\theta=\tan\angle A'DX=\tan\angle ADE=\frac{1}{3}.$$

因$A'D\perp A'Y$,$A'D\perp A'E$,故$A'D\perp$平面$A'EY$,有$A'D\perp EY$.

作$A'G\perp ED$于G,则$A'G\perp$平面DEY.又因$A'D\perp EY$,故$DE\perp EY$.有$\angle BEY=\angle EDA$,$\angle A=\angle B$.所以$\triangle EBY\backsim\triangle DAE$,于是$BY=\frac{1}{3}BE=\frac{2}{3}$.

练 习 十 三

一、选择题

1. 直线a、b在平面外,若a、b在平面上射影是两条相交直线,则a与b的关系是 (　　).

(A)异面　　(B)相交

(C)异面或相交　　(D)异面或平行

2. 直线a、b在平面外,若a、b在平面上的射影是同一条直线,则a与b (　　).

(A)平行　　(B)相交或平行

(C)异面或平行　　(D)异面或相交

3. 已知三条相交于一点的线段PA、PB、PC两两垂直,A、B、C在平面α内,P在平面α外,则点P在α内的射影必是$\triangle ABC$的 (　　).

(A)外心　　(B)内心

(C)重心　　(D)垂心

4. P是平行四边形$ABCD$所在平面外一点,若P到四边的距离都相等,则四边形$ABCD$ (　　).

(A)是正方形　　(B)是长方形

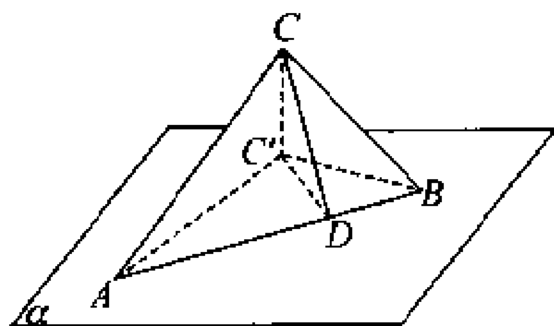
(C)是菱形　　　　　　　　(D)有一个外接圆

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 DD_1 的中点，N 是棱 BC 的中点，P 是棱 A_1B_1 上的一点，$A_1P=\frac{1}{2}PB_1$，则直线 AM、PN 所成角为　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　).

(A)30°　　(B)45°　　(C)60　　(D)90°

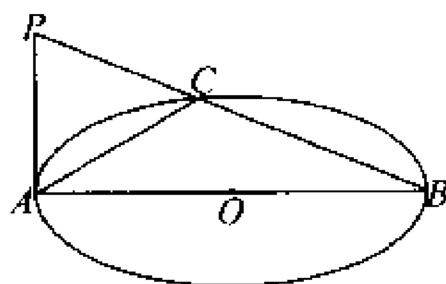
二、填空题

6. 如图，Rt△ABC 的斜边 AB 在平面 α 内，AC 与 BC 与 α 所成角分别为 30°，45°，CD 是斜边 AB 上的高，则 CD 与 α 所成角的大小是________.



(第 6 题)

7. 如图，已知 AB 是圆 O 的直径，C 是圆周上一点，$PA\perp$ 平面 ABC，若 $AB=5\text{cm}$，$AC=2\text{cm}$，点 B 到平面 PAC 的距离为________.



(第 7 题)

8. $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 是正方体，E 是 C_1C 的中点，则 BE 与平面 B_1BD 所成的角余弦值是________.

9. A，B 两点在平面 α 同侧，在 α 上的射影分别是 A_1、B_1. 已知 $AA_1=4$，$BB_1=1$，$A_1B_1=3\sqrt{3}$. 若点 $P\in\alpha$，则 $PA-PB$ 的最大值是________.

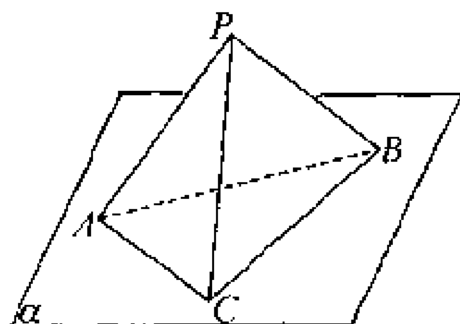
10. △ABC 是边长为 2 的正三角形，BC // 平面 α，A，B，C 在 α 内的射影分别为 A'、B'、C'. 若△$A'B'C'$ 为直角三角形，BC 与平面 α 间的距离为 5，则 A 到平面 α 的距离为________.

三、解答题

11. 如图，P 是△ABC 所在平面 α 外一点，$PA\perp BC$.

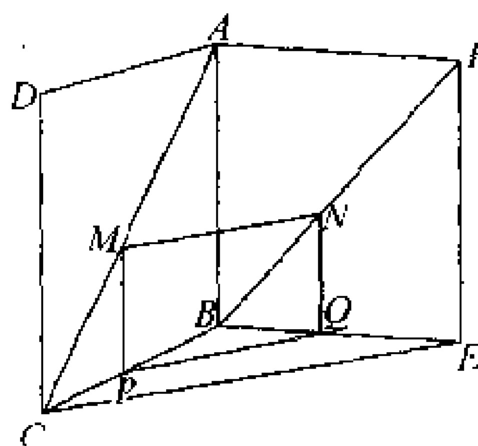
(1) 若 $PB \perp AC$,求证:$PC \perp AB$.

(2) 若 PA 是平面 α 的一条斜线,$\angle ACB = 90°$,求证:点 P 在平面 α 内的射影在 AC 上.



(第 11 题)

12. 如图,两个全等的正方形 $ABCD$ 和 $ABEF$,$M \in AC$,$N \in FB$,且 $AM = FN$,求证:$MN \parallel$ 平面 BCE.



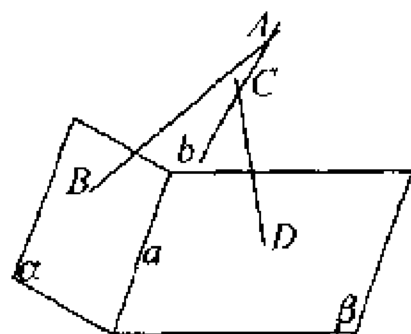
(第 12 题)

13. 已知 a,b 是异面直线,求证:经过 b 有且只有一个平面 α 与 a 平行.

14. 如图,$\alpha \cap \beta = a$,b 是异面直线 AB、CD 的公垂线,$AB \perp \alpha$,$CD \perp \beta$,AB、CD 所成的角为 $60°$,$AB = CD = 5\text{cm}$.

(1) 求证 $a \parallel b$;

(2) 求点 A 到直线 a 的距离.



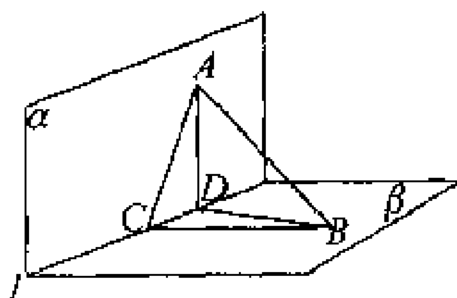
(第 14 题)

15. 如图,$\alpha \cap \beta = l$、$A \in \alpha$,$B \in \beta$,$C \in l$,$BC \perp \alpha$.

(1) 如果 AB 与平面 β 成 $45°$ 的角,AB 在平面 β 内的射影与直线 l 成 $45°$ 的角,求 AB 与平面 α 所成的角.

(2) 如果 AB 与平面 β 成 $45°$ 的角,求证:AB 与平面 α 所成的角不超过 $45°$.

(3) 若 $AB = 2$,A、B 到直线 l 的距离均为 1,求异面直线 AB 与 l 所成的角.



(第 15 题)

第十四讲　空间两个平面

知识点和方法述要

1. 空间两个平面位置关系如下表所示：

位置关系	图示	表示法	公共点个数
相交		$\alpha\cap\beta=l$	无穷多个（一条直线）
平行		$\alpha/\!/\beta$ $(\alpha\cap\beta=\varnothing)$	无

2. 两个平面平行的判定和性质

类别	图示	条件	结论
判定		$a\subset\alpha, b\subset\alpha$ $a\cap b=A$ $a/\!/\beta$, $b/\!/\beta$	$\alpha/\!/\beta$
		$l\perp\alpha$ $l\perp\beta$	$\alpha/\!/\beta$

类别	图示	条件	结论
性质		$\alpha /\!/ \beta$ $a \subset \alpha$	$a /\!/ \beta$
		$\alpha /\!/ \beta$ $\alpha \cap \gamma = a$ $\beta \cap \gamma = b$	$a /\!/ b$
		$\alpha /\!/ \beta$ $l \perp \alpha$	$l \perp \beta$

3. 和两个平行平面同时垂直的直线,叫做这两个平行平面的公垂线,它夹在这两个平行平面之间的部分,叫做这两个平行平面的公垂线段.两平行平面间的公垂线段都相等.我们把公垂线段的长度叫做两个平行平面的距离.

4. (1) 二面角的定义

一个平面内的一条直线,把这个平面分成两部分,其中的每一部分都叫做半平面.从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角.这条直线叫做二面角的棱.这两个半平面叫做二面角的面.

(2) 二面角的平面角定义

以二面角的棱上任意一点为端点,在两个面内分别作垂直于棱的两条射线,这两条射线所成的角叫做二面角的平面角.

平面角是直角的二面角叫做直二面角.

在适当的位置,采用某种适宜的方式作出二面角的平面角常是

有关二面角的问题得以顺利解决的前提.

(3) 在立体几何中,翻折问题常与二面角联系在一起.在解有关问题时应注意利用折棱两侧部分各自元素间相对位置的不变性及原平面图形中与二面角相关联的垂直关系.

5. (1) 两个平面互相垂直的定义

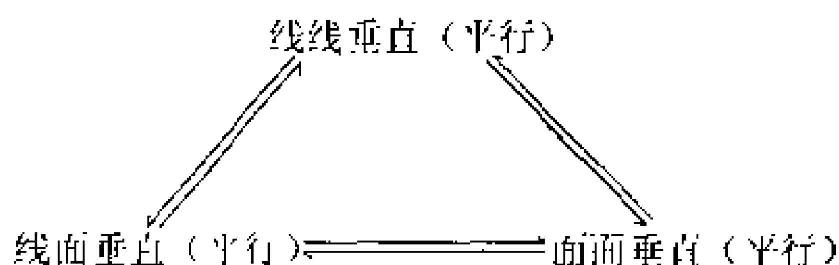
两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,则称这两个平面互相垂直.

(2)两个平面垂直的判定与性质定性

<table>
<tr><th></th><th>图 示</th><th>条 件</th><th>结 论</th></tr>
<tr><td rowspan="2">判定</td><td></td><td>$\angle MON$ 是二面角 $\alpha-a-\beta$ 的平面角,$\angle MON=90^\circ$</td><td rowspan="2">$\alpha\perp\beta$</td></tr>
<tr><td></td><td>$m\perp\beta$
$m\subset\alpha$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\angle MON$ 是二面角 $\alpha-a-\beta$ 的平面角,$\alpha\perp\beta$.</td><td>$\angle MON=90^\circ$</td></tr>
</table>

	图 示	条 件	结 论
性质		$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=a$，$m\perp a$，$m\subset\alpha$	$m\perp\beta$
		$\alpha\perp\beta$，$p\in\alpha$，$p\in m$，$m\perp\beta$	$m\subset\alpha$

6. 注意利用以下转化：



例 题 精 讲

例1 如图 14-1 所示，S 为平面 ABC 外一点，$\angle ASB=45°$，$\angle BSC=60°$，二面角 $A-SB-C$ 为直二面角，求$\angle ASC$ 的余弦值.

分析一 在 SB 上取一点 P，使 $SP=1$，过 P 分别在平面 ASB、平面 CSB 上作 $MP\perp SB$，$QP\perp SB$，M，Q 分别在 SA、SC 上(如图 14-2)，则$\angle MPQ$ 为二面角 $A-SB-CR$ 的平面角，$\angle MPQ=90°$.

设$\angle ASC=\alpha$，则

$$MP = SP\tan 45° = 1,$$

$$SM=\frac{SP}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2},$$

$$PQ=SP\tan 60^\circ=\sqrt{3},$$

$$SQ=\frac{SP}{\cos 60^\circ}=2,$$

$$MQ=\sqrt{PM^2+PQ^2}=2,$$

于是，$SQ=QM$，$\triangle SMQ$ 是等腰三角形，有

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{2}SM}{SQ}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

即为所求.

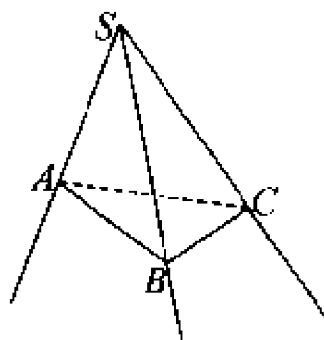


图 14-1

分析二 改变观察角度，把$\angle BSC$ 放置在平面α 内，如图 14-3 所示. 由于二面角 $A-SB-C$ 是直二面角，SB 实际上就是 SA 在平面 SBC 上的射影，$\angle ASB=45^\circ$，$\angle BSC=60^\circ$. 有

$$\cos\angle ASC=\cos\angle ASB\cos\angle BSC$$

$$=\cos 45^\circ\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

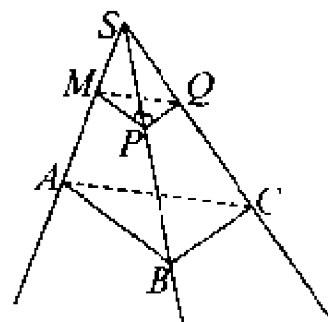


图 14-2

注 不能想当然地把$\angle ABC$ 当作二面角$A-SB-C$ 的平面角，以 SB 为棱的二面角$A-SB-C$ 的大小与$\triangle ABC$ 的形状无关，因此在例 1 的解答过程中，将 A、B、C 三点搁置一边，选取关键量 $SP=1$ 作为基础，通过解三角形将空间图形转化为平面图形的方法来处理.

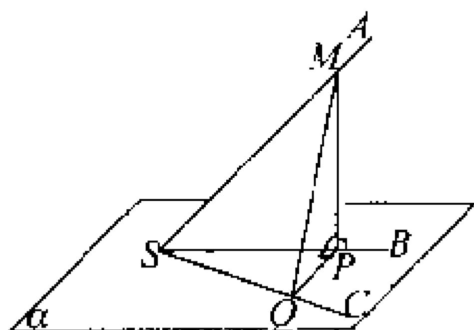


图 14-3

例 2 如图 14-4，设平面 AC 和 BD 相交于 BC，它们所成的一个二面角为 45°，P 为面 AC 内一点，Q 为面 BD 内一点，已知直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影，并且 M 在 BC 上，又设 PQ 与平面

BD 所成的角为 β，$\angle CMQ=\theta$，$(0^\circ<\theta<90^\circ)$，线段 PM 的长为 a. 求线段 PQ 的长.

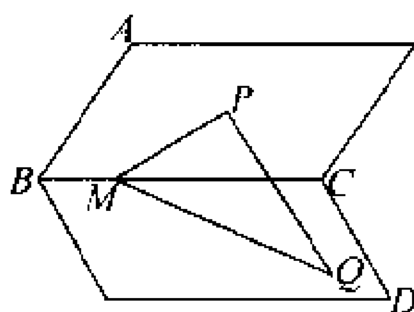


图 14－4

分析 因直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内射影，故点 P 在平面 BD 内射影 R 在 MQ 上，如图 14-5 所示，$\angle PQR$ 即为 PQ 与平面 BD 所成角，$\angle PQR=\beta$，只须求得 PR 问题即可解决. 作 $PN\perp BC$，交 BC 于 N，连 NR，$\angle PNR$ 即为二面角 $A-BC-D$ 的平面角，$\angle PNR=45^\circ$，利用方程易于处理，设 $PR=x$，在 $Rt\triangle PRN$ 中，$NR=PR=x$.

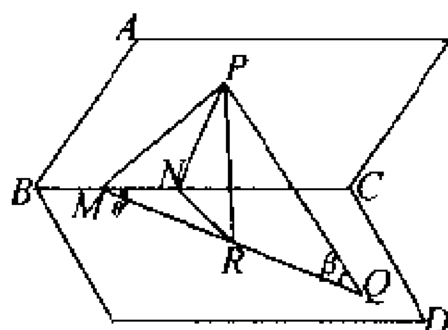


图 14－5

在 $Rt\triangle MRN$ 中，$MR=NR\csc\theta=x\csc\theta$ 在 $Rt\triangle PRM$ 中，$PM=a$，故由

$$PM^2=PR^2+MR^2$$

可得

$$a^2=x^2+(x\csc\theta)^2$$

解得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{1+\csc^2\theta}}$.

在 $Rt\triangle PQR$ 中，有

$$PQ=x\csc\beta=\frac{a\csc\beta}{\sqrt{1+\csc^2\theta}}$$

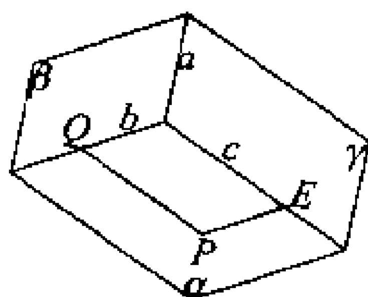


图 14－6

例 3 已知平面 α,β,γ 满足 $\beta\perp\alpha$，$\gamma\perp\alpha$，$\beta\cap\gamma=a$，求证：$a\perp\alpha$.

分析一 如图 14-6，设 $\beta\cap\alpha=b$，$\gamma\cap\alpha=c$，考虑利用面面垂直导致线面垂直、线线垂直，取平面 α 内一点 P，过 P 分别作 b，c 的垂线，且交 b，c 于 Q、E，因 $\alpha\perp\beta$，故 $PQ\perp\beta$. 有 $PQ\perp a$. 同理，$PE\perp a$，于是 $a\perp\alpha$.

分析二 如图 14-7，分别在平面 α、β 内各取一点 P，Q($P,Q\notin a$)作平面 α 的垂线 m，n，则 $m/\!/n$，因 $\beta\perp\alpha$，$\gamma\perp\alpha$，故 $m\subset\beta$，$n\subset\gamma$，故 $m/\!/\gamma$ 进而有 $m/\!/a$，所以 $a\perp\alpha$.

分析三 利用对称性和过空间一点作平面的垂线的惟一性,采用同一法,如图 14-8,在 a 上取一点 M,向平面 α 引垂线 MN,因 $\beta\perp\alpha$, $m\in\beta$,故 $MN\subset\beta$,同理 $MN\subset\gamma$,所以 $MN=\beta\cap\gamma$,即 MN 与 a 重合,从而可知 $a\perp\alpha$.

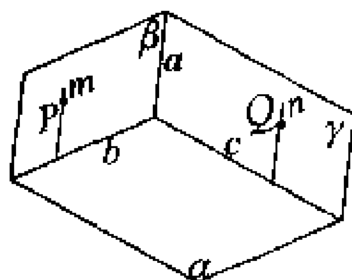


图 14-7

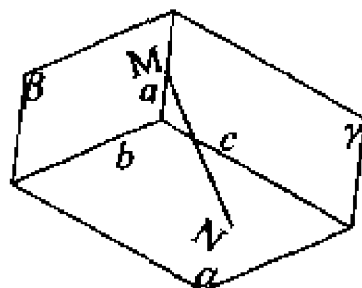


图 14-8

例 4 如图 14-9,已知△ABC 中,$\angle A=90°$,D 为 BC 上一点,把△ADC 沿 AD 折起,使 C 点所处新的位置 C' 在平面 ABC 上射影 H 恰好 AB 上.二面角 $C'-AD-H$ 为 $60°$,试求$\angle BAD$ 的正切值.

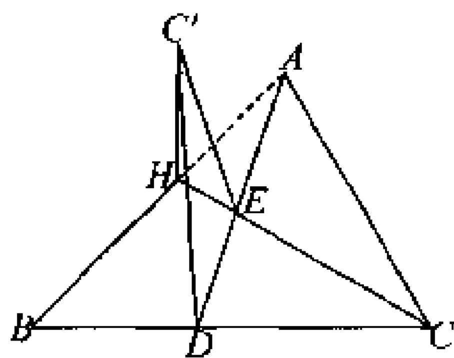


图 14-9

解 依题设,$C'H\perp$平面 ABC,作 $HE\perp AD$,HE 交 AD 于 E,连 $C'E$,根据三垂线定理知 $C'E\perp AD$,$\angle C'EH$ 为二面角 $C'-AD-H$ 的二面角,$\angle C'EH=60°$,$C'E=2HE$,且因△AEC' 是△AEC 沿 AD 折起所得图形,$\angle AEC=\angle AEC'=90°$,$EC=EC'$

在 Rt△AHC 中,$\angle HAC=90°$,

$$AE^2=HE\cdot EC=HE\cdot EC'$$
$$=HE\cdot 2HE=2HE^2,$$

所以 $AE=\sqrt{2}HE$.于是,有

$$\tan\angle BAD=\frac{HE}{AE}=\frac{HE}{\sqrt{2}HE}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即为所求.

例 5 已知$\triangle ABC$中,$AC=BC=1$,$AB=\sqrt{2}$,平面 ABC 外一点 S,$SA=SB=2$,$SC=\sqrt{5}$,点 P 是 SC 的中点.

(1) 求二面角 $S-AC-B$ 的大小;

(2) 求证:平面 $PAB\perp$平面 ABC.

分析一 因 $AC=BC=1$,$AB=\sqrt{2}$,根据勾股定理逆定理知 $AC\perp BC$,又因 $SA=2$,$SC=\sqrt{5}$,同理 $SA\perp AC$.

过 A 作 $AD/\!/BC$,过 B 作 $BD/\!/AC$,交点为 D,则四边形 $ADBC$ 为正方形,$\angle SAD$ 为二面角 $S-AC-B$ 的平面角,且 $BD\perp$平面 SAD,$CB\perp$平面 SBD,可知 $SD\perp$平面 $ADBC$.于是

$$\cos\angle SAD=\frac{AD}{SA}=\frac{1}{2}.$$

$\angle SAD=60^\circ$,即为二面角 $S-AC-B$ 的大小.因 PE 是$\triangle SCD$ 的中位线,故 $PE/\!/SD$,进而可得 $PE\perp$平面 ABC,所以平面 $PAB\perp$平面 ABC.

分析二 注意到 P 为中点,联系中位线,如图 14-10,设 AB、AC 中点为 E、F,连 PE、PF、EF 则 $PF/\!/SA$,$EF/\!/BC$,$AC\perp$平面 PEF,$\angle PFE$ 为二面角 $S-AC-B$ 的平面角且 $AC\perp PE$.

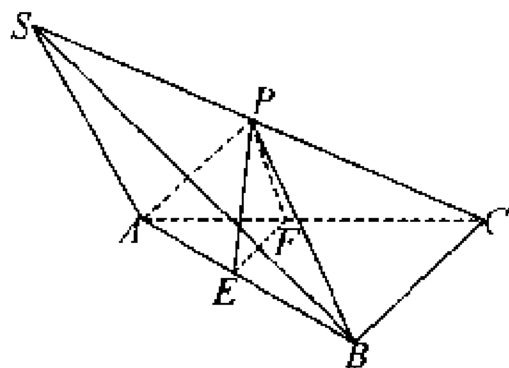


图 14-10

在 Rt$\triangle SAC$ 和 Rt$\triangle SBC$ 中,

$$PA=PB=\frac{1}{2}SC,$$

$\triangle APB$ 为等腰三角形,有 $PE\perp AB$,故 $PE\perp$平面 ABC,有平面 $PAB\perp$平面 ABC.

在 Rt$\triangle PEF$ 中,$EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$,$PF=\frac{1}{2}SA=1$,故$\angle PFE=60^\circ$,即为二面角 $S-AC-B$ 的大小.

注 异面直线上两点间的距离公式,其推导方法是典型的,例 5

中的分析过程实际上就是公式推导过程的翻版,异面直线上两点间距离公式是计算二面角大小的重要工具之一.在例 5 中,AC 为异面直线 SA、BC 的公垂线段.设 SA 和 BC 所成角为 θ,根据异面直线上两点间的距离公式即得

$$\cos\theta = \frac{AC^2 + SA^2 + BC^2 - SB^2}{2SA \cdot BC} = \frac{1^2 + 2^2 + 1^2 - 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

由此可知 $\theta = 60°$,即二面角 $S - AC - B$ 为 $60°$.

例 6 已知二面角 $M - l - N$ 的大小为 $\theta(0° < \theta < 90°)$,$\triangle ABC$ 在面 M 内,$\triangle A'B'C'$是$\triangle ABC$ 在面 N 内的射影,求证:

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\theta.$$

分析 (i) 先考虑最简单的情形,$\triangle ABC$ 有一边在棱 l 上,如图 14-11(1).设 $BC \subset l$,即 $B'C'$ 与 BC 重合,作 $AD \perp BC$,AD 交 BC 于 D,连 $A'D$,根据三垂线定理的逆定理可得 $A'D \perp l$,于是$\angle ADA'$ 为二面角 $M - l - N$ 的平面角,$\angle ADA' = \theta$,

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} B'C \cdot A'D}{\frac{1}{2} BC \cdot AD} = \frac{A'D}{AD} = \cos\theta,$$

即 $S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\theta$.

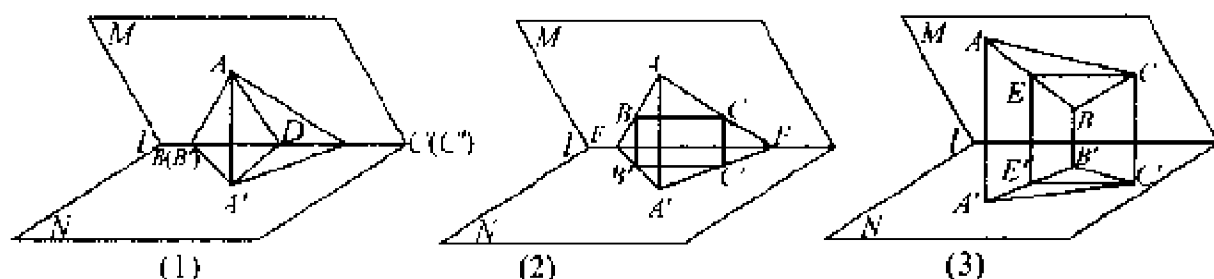


图 14 - 11

(ii)若$\triangle ABC$ 有一边平行于 l,如图 14-11(2),设 $BC /\!/ l$,延长 AB、AC 交 l 于 E、F,则 $B' \in A'E$,$C' \in A'F$,且 $BC /\!/ B'C' /\!/ l$,$BC = B'C'$.

于是

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{BC^2}{EF^2},\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle A'EF}}=\frac{B'C'^2}{EF^2},$$

即
$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle A'EF}}{S_{\triangle AEF}}. \quad ①$$

由(i)知 $S_{\triangle A'EF}=S_{\triangle AEF}\cdot\cos\theta$ 代入①即可得

$$S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\theta.$$

(iii)若$\triangle ABC$各边即不平行于 l 也不在 l 上,过一顶点作平行于 l 的直线,将$\triangle ABC$分成两个较小的三角形,如图14-11(3)所示$\triangle ACE$,$\triangle CBE$、$\triangle A'B'C'$相应地也被平行 l 的直线分成$\triangle A'C'E$、$\triangle C'B'E'$,利用(ii)得,$S_{\triangle A'C'E'}=S_{\triangle ACE}\cdot\cos\theta$,$S_{\triangle C'B'E'}=S_{\triangle CBE}\cdot\cos\theta$,相加即得 $S_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\theta$.

注 1. 因多边形可以分割成若干个三角形,故射影面积定理对于多边形也是成立的.

2. 例6中运用了由易到难、化繁为简,将未知的问题化归为已经解决的问题的重要的数学思想方法.

3. 求二面角的大小可从三个方面来考虑:作出二面角的平面角,计算其大小;射影面积定理;异面直线上两点间的距离公式.在用距离公式时,应注意到二面角的平面角与异面直线所成的角相等或互补,审清题意,作出适当的判断.

例7 两两互不平行也不重合的三条直线组成的空间图形的对称轴最多有多少条?

解 首先,在空间的两条不平行的直线具有三条对称轴,当两条直线相交时,它们是角平分线(两条)及过交点垂直于此相交直线确定的平面的直线;当两条直线异面时,可以分别过一直线作平行于另一直线的平面,再作一平面与前述两平面平行且等距,那么这两条直线在这个平面上的射影的交角平分线(两条)就是它们的对称轴,第三条

对称轴是这两条直线的公垂线.

现在给定三条直线，每两条组成一对，显然可以组成三对，每一对的两条直线构成的图形有三条对称轴，因此三条直线构成的图形有至多九条对称轴，另一方面，可以作成具有九条对称轴的这样三条直线构成的图形：过一点，且两两垂直的三条直线.

例8 如图 14-12，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 是棱 BC 的中点，M 为线段 A_1F 上的动点，当 $\triangle DMD_1$ 与 $\triangle CMC_1$ 的面积之和取最小值时，M 点在 A_1F 上的位置记为 M_0. 试求半平面 M_0DD_1 与半平面 M_0CC_1 所成二面角 $D_1D-M_0-CC_1$ 的余弦值.

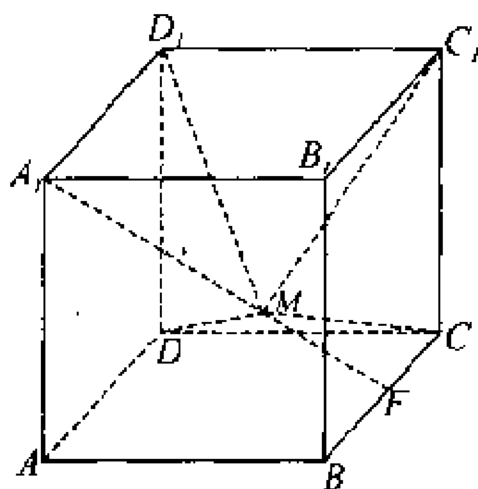


图 14-12

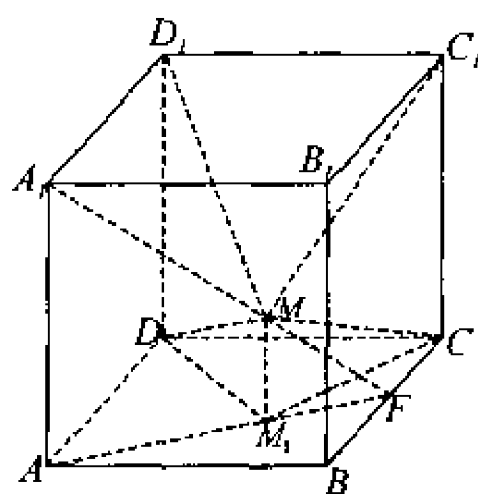


图 14-13

分析 如图 14-13 过 M 作 $MM_1\perp$ 底面 $ABCD$，A、M_1、F 共线，因 $C_1C // D_1D // MM_1$，$C_1C=D_1D=1$，$M_1C\perp C_1C$，$M_1D\perp D_1D$ 要 $S_{\triangle D_1MD}+S_{\triangle C_1MC}$最小，即

$$\frac{1}{2}\cdot DD_1\cdot M_1D+\frac{1}{2}C_1C\cdot M_1C=\frac{1}{2}(M_1D+M_1C)$$

最小，也就是 DM_1+CM_1 即可，且当 DM_1+CM_1 取最小值时的 M_1 所对应的 A_1F 上的点 M 即是 M_0.

问题变为在 AF 上求一点 M_1，使它到二定点 C、D 距离之和最小，M_1 的确定方法如下：如图 14-14 在平面 AC 上作点 C 关于直线 AF 的

对称点 C'，连 DC'，若与 AF 交点在线段 AF 上，即为 M_1，此时，显见$\angle DM_1C$ 为二面角 $D_1D-M_0-CC_1$ 的平面角.

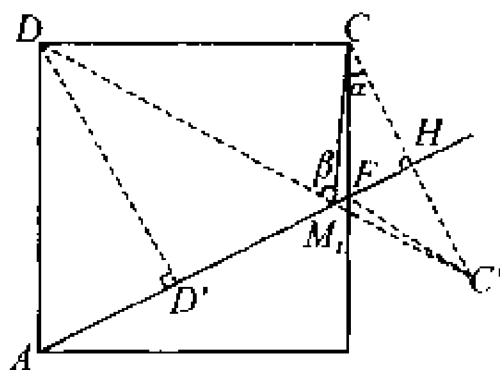


图 14-14

设$\angle HCF=\alpha$，易求 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$CH=\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$CC'=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\angle DCC'=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

根据余弦定理可得

$$DC'^2=DC^2+CC'^2-2DC\cdot CC'\cos\angle DCC'$$
$$=1^2+(\frac{2}{\sqrt{5}})^2-2\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot(-\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{13}{5}.$$

故 $DC'=\sqrt{\dfrac{13}{5}}=\dfrac{\sqrt{65}}{5}$，又由 $DD'=2CH$ 得 $DM_1:C'M_1=2:1$，有 $DM_1=\dfrac{2\sqrt{65}}{15}$，$CM_1=\dfrac{\sqrt{65}}{15}$，$CM_1>CF$，$M_1$ 在线段 AF 上，设$\angle DM_1C=\beta$，则

$$\cos\beta=\frac{DM_1^2+CM_1^2-CD^2}{2DM_1\cdot CM_1}=-\frac{\frac{260}{225}+\frac{65}{225}}{2\cdot\frac{2\sqrt{65}}{15}\cdot\frac{\sqrt{65}}{15}}=\frac{5}{13}$$

所求二面角的度数的余弦值是$\dfrac{5}{13}$.

例 9 P、A、B、C、D 是空间中五个不同的点$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\theta$. 这里 θ 是已知锐角，试确定$\angle APC+\angle BPD$ 的最大值和最小值.

解 记$\angle APC=\alpha$，$\angle BPD=\beta$，当$\angle APB=\theta$，C 在 PA 上，D 在 PB 上时，如图 14-15，空间五点位置满足题设条件，此时 $\alpha=\beta=0$，从而$(\alpha+\beta)\min=0$.

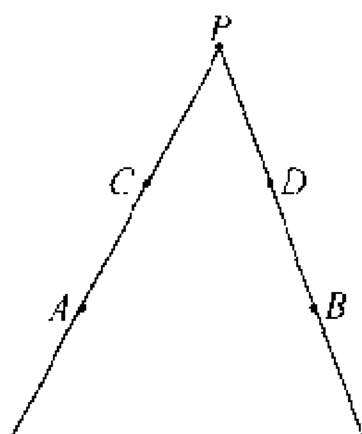


图 14－15

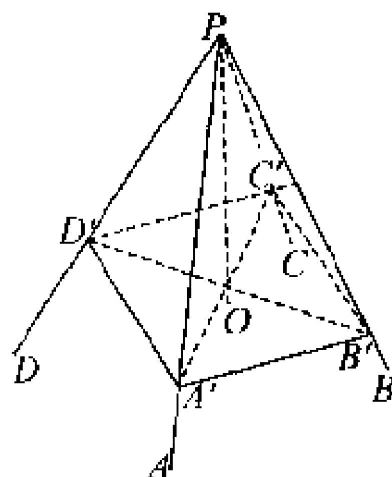


图 14－16

下面要求 $\alpha+\beta$ 的最大值，显然 $P-ABCD$ 是凸面角(如图 14-16).

由于$\angle APB=\angle BPC=\angle CPD=\angle DPA=\theta$，根据对称性可知平面 APC 垂直平面 BPD，设平面 APC 与平面 BPD 的交线为 PO，则$\angle APO=\angle CPO=\frac{\alpha}{2}$，$\angle BPO=\angle DPO=\frac{\beta}{2}$，不妨设 $PO=1$，过 O 作平面垂直 PO，交 PA、PB、PC、PD 于 A'、B'、C'、D'，则 $A'C'\perp B'D'$ 于是在$\triangle A'OD'$和$\triangle A'PD'$中

$$\begin{aligned}A'D'^2&=A'O^2+D'O^2\\&=A'P^2+D'P^2-2A'P\cdot D'P\cos\angle A'PD,\end{aligned}$$

即 $\tan^2\frac{\alpha}{2}+\tan^2\frac{\beta}{2}=\sec^2\frac{\alpha}{2}+\sec^2\frac{\beta}{2}-2\sec\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\frac{\beta}{2}\cdot\cos\theta$,

可化为
$$\cos\theta=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2},$$

有
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\theta-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant 2\cos\theta-1,$$

当 $\alpha=\beta$ 时取等号，因 $0<\frac{\alpha+\beta}{2}<\pi$，函数 $y=\cos x$，$x\in(0,\pi)$，是减函数，故此时 $\alpha+\beta$ 取最大值，$2\arccos(2\cos\theta-1)$.

练 习 十 四

一、选择题

1. 在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面 α, β 内，分别有直线 a, b，它们与棱 l 都不垂直，则 ( ).

(A) 当该二面角是直二面角时，可能 $a /\!/ b$，也可能 $a \perp b$

(B) 当该二面角是直二面角时，可能 $a /\!/ b$，但不可能 $a \perp b$

(C) 当该二面角不是直二面角时，可能 $a /\!/ b$，但不可能 $a \perp b$

(D) 当该二面角不是直二面角时，不可能有 $a /\!/ b$，但可能有 $a \perp b$.

2. AB, CD 是夹在两个平行平面 α, β 之间的异面线段，$A, C \in \alpha$, $B, D \in \beta$. 若以 M, N 分别是 AB, CD 是中点，则 ( ).

(A) $MN=\frac{1}{2}(AC+BD)$ (B) $MN<\frac{1}{2}(AC+BD)$

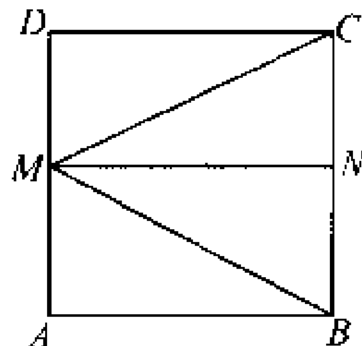
(C) $MN>\frac{1}{2}(AC+BD)$ (D) MN 与 $\frac{1}{2}(AC+BD)$ 大小不确定

3. 设平面 $\alpha \perp$ 平面 β，直线 l 与平面 α, β 所成角分别为 θ_1, θ_2，则 ( ).

(A) $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ (B) $\theta_1+\theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$

(C) $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ (D) $\theta_1+\theta_2$ 可能大小 $\frac{\pi}{2}$，也可能小于 $\frac{\pi}{2}$.

4. 如图所示，正方形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AD, BC 的中点，沿 MN 把这个正方形纸片折成以 MN 为棱的二面角 $A-MN-C$，使折成后的锐角 $\angle BMC$ 的正弦函数值为 0.6，这时二面角 $A-MN-C$ 的平面角是 ( ).



(第 4 题)

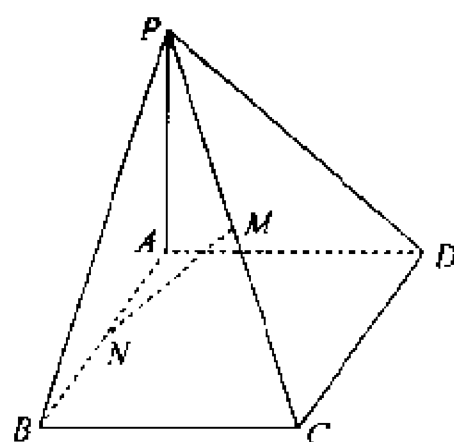
(A) $90°$ (B) $60°$ (C) $45°$ (D) $30°$

二、填空题

5. 将正方体的中心同八个顶点相连,得到八条连线,以每条连线为棱,得到若干个二面角,每个二面角的大小是________.

6. 空间一点 P 到二面角 $\alpha-a-\beta$ 的两个面的距离分别是 1 和 $\sqrt{2}$,到棱 a 的距离是 2,则二面角 $\alpha-a-\beta$ 的大小是______.

7. 如图, $ABCD$ 是正方形, $PA\perp$ 平面 BD, M, N 分别是 PC 和 AB 的中点,当 $MN\perp PC$ 时,二面角 $P-CD-B$ 大小是______.



(第 7 题)

8. 设矩形 $ABCD$ 中, $AB=6$, $AD=8$,对角线 AC, O_1, O_2 分别为$\triangle ABC$ 和$\triangle CDA$ 的内心,把$\triangle ADC$ 沿 AC 折叠成直二面角 $D-AC-B$,则两内心 O_1 及 O_2 间的距离为______.

9. Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle A=90°$, $AB=2$, $AC=\sqrt{2}$, A, B 位于平面 α 同侧, D、E 分别是 A、B 在平面 α 上射影, $AD=1$, $BE=2$, $C\in\alpha$.则$\triangle ABC$ 所在面与 α 所成二面角的平面角为 $\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}])$的大小为______.

10. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,线段 BD、A_1C_1 上各有一点 P、Q,若 PQ 有定长 l,且 $a<l<\frac{\sqrt{6}}{2}a$,则线段 PQ 的中点轨迹的面积是______.

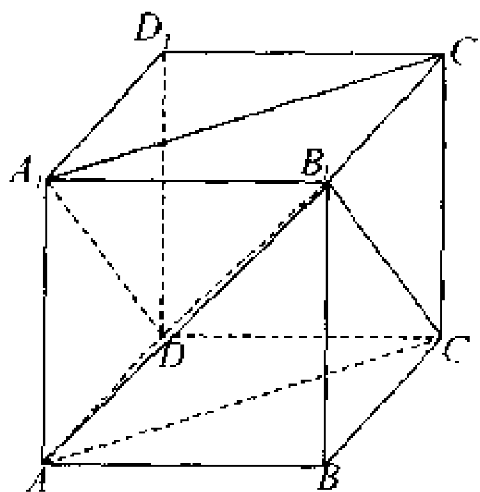
三、解答题

11. 如图,在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

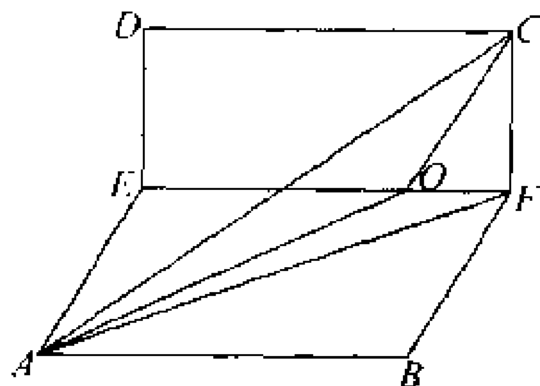
(1) 求证:平面 AB_1C // A_1C_1D;

(2) 求平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 间的距离.

12. 如图, $ABCD$ 是正方形, E、F 分别是 AD、BC 边上的点, EF // AB, EF 交 AC 于点 O,以 EF 为棱把它折成直二面角 $A-EF-D$ 后,求证:无论 EF 怎样移动, $\angle AOC$ 是定值.

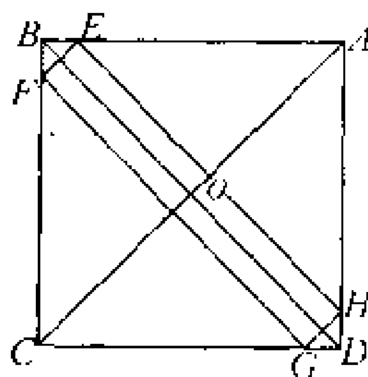


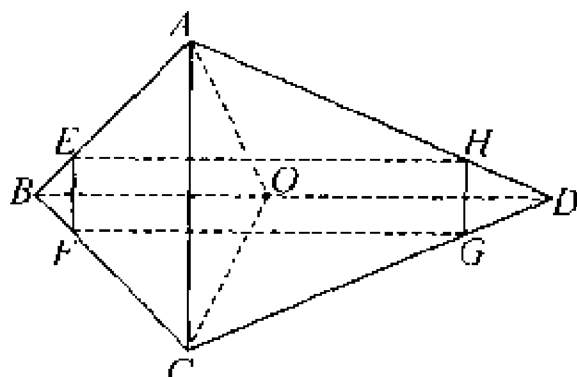
(第 11 题)



(第 12 题)

13. 如图,设正方形 $ABCD$ 边长为 a, E、F、G、H 分别是四边 AB、BC、CD、DA 上的点,并且 $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{BF}=\frac{CG}{DG}=\frac{AH}{DH}=\frac{m}{n}$,将此正方形沿对角线 BD 折起,设平面 ABD 和平面 CBD 所成二面角为 θ,当 θ, m, n 为何值时, $EFGH$ 为正方形?





(第 13 题)

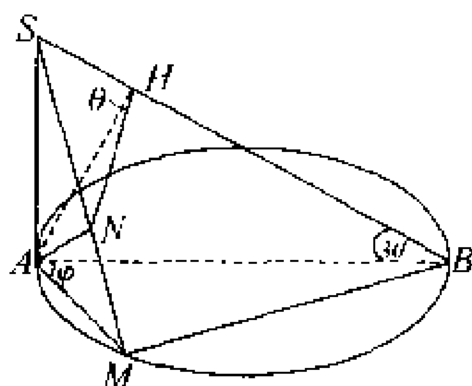
14. 如图,设平面 α 内一圆,直径 $AB=2R$,过 A 作平面 α 的垂线,垂线上点 S 满足 $\angle ABS=30°$,动点 M 在圆周上移动(不与 A, B 重合),以 N 和 H 表示 A 点,在 SM 和 SB 上的射影,又设 $\angle BAM=\varphi$.

(1) 求证: $AN\perp$ 平面 SMB,且 $\triangle SAB$、$\triangle SAM$、$\triangle SBM$、$\triangle ABM$ 均为直角三角形;

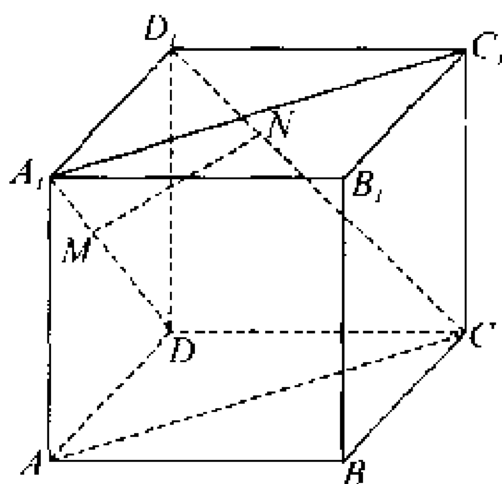
(2) 求证: $\angle AHN$ 是以 SB 为棱的二面角 $A-SB-N$ 的平面角;

(3) 设$\angle AHN=\theta$,证明:

$$\tan\varphi\cdot\tan\theta=2.$$



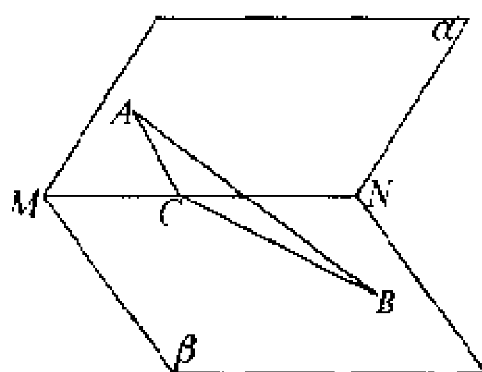
(第 14 题)



(第 15 题)

15. 如图,正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,在侧面对角线 A_1D 上取点 M,在 CD_1 上取点 N,使得线段 MN 平行于对角面 A_1ACC_1,试计算满足上述条件的线段 MN 长度的最小值.

16. 如图,平面 α,β 交于直线 MN,点 A 在平面 α 上,点 B 在平面 β 上,点 C 在直线 MN 上.$\angle ACM=\angle BCN=45°$,$A-MN-B$ 是 $60°$的二面角,$AC=1$,求二面角 $A-BC-M$ 的大小.



(第 16 题)

17. 在边长为 3 的正三角形纸片 ABC 中,D、E 是 BC 边上的三等分点,以 AD,AE 为折痕把$\triangle ABD$,$\triangle ACE$ 翻折,使 AB 与 AC 重合,求折后相邻面形成的二面角的平面角的余弦值.

第十五讲　多面体

知 识 点 和 方 法 述 要

1. 棱柱

(1) 棱柱概念与性质

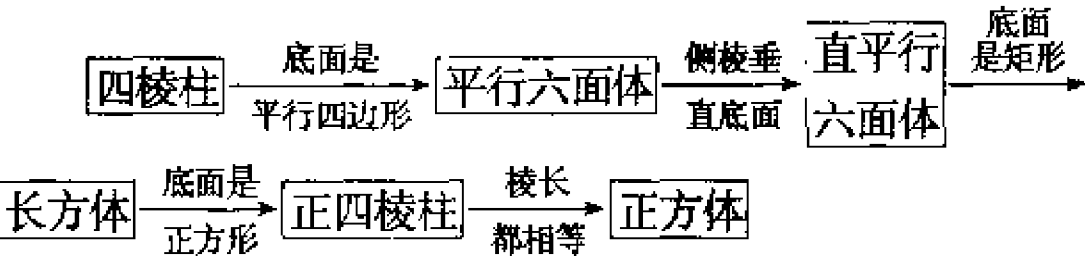
<table>
<tr><th colspan="2">名 称</th><th>棱 柱</th><th>直棱柱</th><th>正棱柱</th></tr>
<tr><td colspan="2">图形</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">定义</td><td>有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱</td><td>侧棱垂直于底面的棱柱叫做直棱柱</td><td>底面是正多边形的直棱柱叫做正棱柱</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>侧棱</td><td>相等</td><td colspan="2">相等且垂直于底面</td></tr>
<tr><td>侧面</td><td>平行四边形</td><td>矩形</td><td>全等矩形</td></tr>
<tr><td>底面</td><td colspan="2">全等的多边形</td><td>全等的正多边形</td></tr>
<tr><td>截面</td><td colspan="3">平行于底面的截面与底面全等</td></tr>
<tr><td>对角面</td><td>平行四边形</td><td colspan="2">矩形</td></tr>
<tr><td colspan="2">侧面积</td><td>直截面的周长与侧棱长的乘积</td><td>底面的周长与侧棱长的乘积</td><td>底面周长与侧棱长的乘积</td></tr>
<tr><td colspan="2">全面积</td><td colspan="3">侧面积与底面积的和</td></tr>
</table>

(2) 特殊的四棱柱

(i) 平行六面体的概念与性质

定义	底面是平行四边形的四棱柱叫做平行六面体
性质	1. 具有一般棱柱所有性质 2. 六个面都是平行四边形 3. 相对的两个面所在的平面互相平行，并且这两个面是全等的平行四边形

(ii)



2. 棱锥

(1) 棱锥的概念与性质

名称		棱锥	正棱锥
图形			
定义		有一个面是多边形，其余各面是一个有公共顶点的三角形的多面体叫棱锥.	底面是正多边形，顶点在底面的射影是底面的中心的棱锥叫正棱锥.
性质	侧棱	有公共顶点	有公共顶点且相等
	侧面	三角形	全等三角形
	底面	多边形	正多边形
	截面	平行于底面的截面与底面相似，$\sqrt{S_{截}}:\sqrt{S_{底}}=h_1:h$（$h_1$，$h$ 分别是顶点到截面、底面距离）	

(2) 正棱锥的侧面积

$$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'.$$

其中 c 是底面周长,h' 是斜高.

3. 棱台

(1) 棱台的概念与性质

名称		棱台	正棱台
图形			
定义		用一个平行于底面的平面截棱锥,底面和截面之间的部分叫棱台	由正棱锥截得的棱台叫正棱台
性质	侧棱	延长后交于一点	相等且延长交一点
	侧面	梯形	全等等腰梯形
	底面	两相似多边形	两相似正多边形
	截面	平行于底面的截面与底面相似; $2\sqrt{S_{中}}=\sqrt{S_{上}}+\sqrt{S_{下}}$($S_{中}$、$S_{上}$、$S_{下}$分别为中截面、上、下底面的面积).	

(2) $S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$.

(3) 正棱台的两底面中心连线、相应的边心弦和斜高组成一个直角梯形;两底面中心连线、侧棱和两底面相应的外接圆半径也组成一个直角梯形.常利用上述直角梯形,集中棱台中有关元素进行计算.

4. 多面体的欧拉公式

设凸多面体的顶点数为 V,棱数为 E,面数为 F,则

$$V+F-E=2.$$

例 题 精 讲

例1 如图15-1，直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M是CC_1的中点，求证：$A_1M\perp AB_1$.

分析一 注意到$B_1C_1\perp$平面A_1C. 欲证$AB_1\perp A_1M$，根据三垂线定理，只须证$AC_1\perp A_1M$.

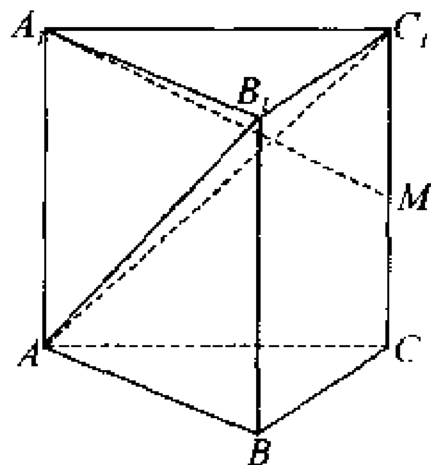


图 15-1

设$\angle A_1AC_1=\alpha$，$\angle C_1A_1M=\beta$，则

$$\tan\alpha=\frac{A_1C_1}{A_1A}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan\beta=\frac{C_1M}{A_1C_1}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\alpha=\beta$. 于是

$\angle C_1A_1M+\angle A_1C_1A=\angle A_1AC_1+\angle A_1C_1A=90°$，

即得$A_1M\perp AC_1$.

分析二 如图15-2，在原直三棱柱的上方补上一个与之完全相同的三棱柱. 问题等于证明$\angle B_2A_1M=90°$. 因$AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，故

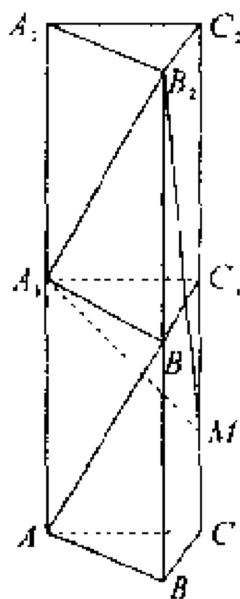


图 15-2

$$A_1B_2^2=B_1B_2^2+A_1B_1^2=(\sqrt{6})^2+2^2=10,$$

$$A_1M^2=A_1C_1^2+C_1M^2=(\sqrt{3})^2+(\frac{\sqrt{6}}{2})^2=\frac{9}{2},$$

$$B_2M^2=B_2C_2^2+C_2M^2=1^2+(\frac{3\sqrt{6}}{2})^2=\frac{29}{2}.$$

由$A_1B_2^2+A_1M^2=B_2M^2$可知$A_1M\perp AC_1$.

例2 若斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的底面是边长为a的正三角形，侧棱长为l，$\angle A_1AC=\angle A_1AB=60°$，求：

(1) 斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面积；

(2) 侧棱 A_1A 到平面 BC_1 的距离.

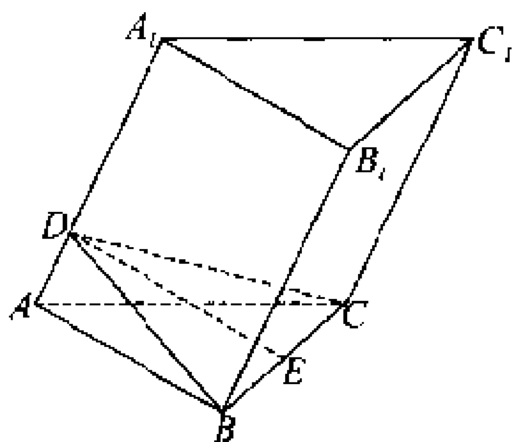


图 15-3

分析 (1) 如图 15-3,过点 B 作 $BD\perp AA_1$,交 A_1A 于 D,连 DC.因$\angle A_1AC=\angle A_1AB$, $AB=AC$, AD 公共,所以$\triangle ABD\cong\triangle ACD$,故有 $DC=DB$, $DC\perp AA_1$, $AA_1\perp$平面 BDC, $AA_1\perp BC$,又因 $BB_1/\!/AA_1$,所以 $BB_1\perp$平面 BDC, $BB_1\perp BC$,故

$$\begin{aligned}S_{斜三棱柱侧}&=BB_1\cdot BC+AA_1\cdot BD+AA_1\cdot DC\\&=AA_1(BC+DB+DC)\\&=AA_1(BC+2BD)\end{aligned}$$

因 $AA_1=l$, $BC=a$, $DB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,所以有

$$S_{斜三棱柱侧}=l(a+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}a)=(\sqrt{3}+1)la.$$

(2) 过 D 作 $DE\perp BC$, DE 交 BC 于 E,则 E 为 BC 中点,因 $BC\perp DE$,故 $DE\perp$平面 B_1BCC_1,即 DE 为 AA_1 到平面 BC_1 的距离

$$DE=\sqrt{BD^2-BE^2}=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})a^2-(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

注 1. $\triangle BDC$ 实际上就是斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的直截面.

2. 注意到$\angle A_1AB=\angle A_1AC$,点 A_1 在平面 ABC 上的射影 O 在$\angle BAC$ 的平分线 AA' 所在的直线上(如图 15-4).因 $AO\perp BC$,根据三垂线定理知 $AA_1\perp BC$,从而 $BB_1\perp BC$,四边形 BCC_1B_1 是矩形.

$$S_{斜三棱柱侧}=2S_{ABB_1A_1}+S_{BCC_1B_1}=(\sqrt{3}+1)al.$$

这里确定四边形 BCC_1B_1 是矩形至关重要.尤其要避免错误地认为三个侧面是全等的平行四边形.

例3 已知正三棱锥 $S-ABC$ 中，E,F 分别为 SB,SC 的中点，且平面 $AEF\perp$平面 SCB，求正三棱锥 $S-ABC$ 的侧面积与底面积之比.

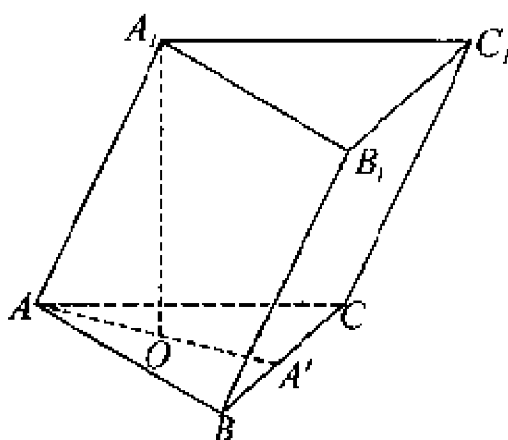


图 15-4

分析 关键在于斜高与底面三角形高的比值，如图 15-5，作正三棱锥的高 SO，连 AO 并延长交 BC 于 D，连 SD 交 EF 于 G，连 AG.

因 $SO\perp$面 ABC，O 是正$\triangle ABC$ 中心，故 D 是 BC 中点，又 EF 是$\triangle SBC$ 的中位线，故 G 是 SD 的中点. 根据对称性，$AE=AF$，所以 $AG\perp EF$，因平面 $AEF\perp$平面 SCB，所以 $AG\perp$平面 SBC，有 $AG\perp SD$，$\triangle ASD$ 是等腰三角形，$SA=DA$.

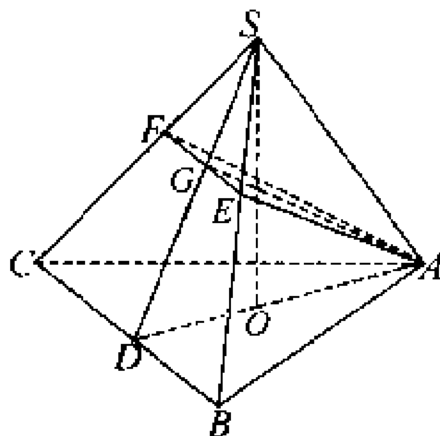


图 15-5

设正三棱锥 $S-ABC$ 底面边长为 a，则 $AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$SA=SB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$BD=\frac{a}{2}$，$SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 于是

$$\frac{S_{棱锥侧}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3\cdot\frac{1}{2}SD\cdot BC}{\frac{1}{2}AD\cdot BC}=\frac{3SD}{AD}=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\sqrt{6}$$

即为所求.

例4 一个棱台的上底面积为 S'，下底面积为 S，一个面积为 Q 的平行于底面的截面将这棱台的高自上而下分成 $n:m$，求证：$\sqrt{Q}=\frac{n\sqrt{S}+m\sqrt{S'}}{n+m}$.

分析一 如图 15-6，将棱台还原成棱锥，设三部分的高为 a,b,c，则

$$S':Q:S=a^2:(a+b)^2:(a+b+c)^2. \quad ①$$

因$\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$,故可令 $b=nt,c=mt$,代入①得

$$\frac{\sqrt{S'}}{a}=\frac{\sqrt{Q}}{a+nt}=\frac{\sqrt{S}}{a+nt+mt}. \quad ②$$

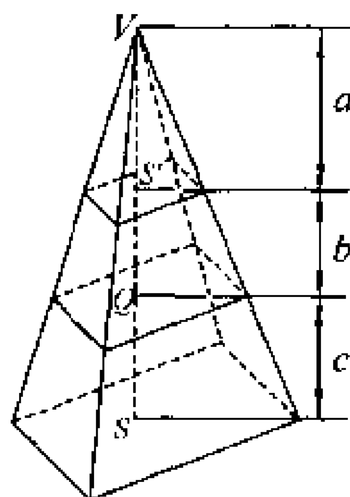


图 15-6

记$\frac{\sqrt{S'}}{a}=k$,由②得

$$\sqrt{S'}=ak, \quad ③$$

$$\sqrt{Q}=ak+ntk, \quad ④$$

$$\sqrt{S}=ak+ntk+mtk, \quad ⑤$$

(④-③)÷(⑤-④)得

$$\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{S'}}{n}=\frac{\sqrt{S}-\sqrt{Q}}{m}, \quad ⑥$$

即 $\sqrt{Q}=\frac{n\sqrt{S}+m\sqrt{S'}}{m+n}$.

若直接运用有关比例的定理由②即可得⑥.

分析二 如图 15-7,O'、O 分别为棱台上、下底面的中心,$A'A$ 为侧棱,$A'N/\!/O'O$,截面交 $O'O$、$A'A$ 于 E、F,$A'N$ 交 EF 于 M,则 $O'A'/\!/OA/\!/EF$. 因平行于底面的截面与底面是相似多边形,其面积比是相似比的平方故

$$\frac{MF}{NA}=\frac{A'M}{A'N}=\frac{O'E}{O'O},$$

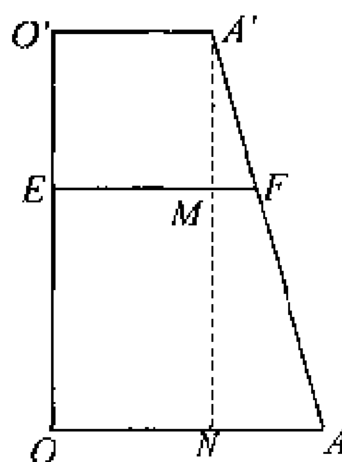


图 15-7

即 $\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}=\frac{n}{m+n}$,

解得 $\sqrt{Q}=\frac{n\sqrt{S}+m\sqrt{S'}}{m+n}$.

注 1. 当 $S'=0$ 时,$\sqrt{Q}=\frac{n\sqrt{S}}{n+m}$,即为棱锥的平行于底面的截面面积公式.

当 $m=n=1$ 时，$\sqrt{Q}=\frac{\sqrt{S}+\sqrt{S'}}{2}$ 为棱台的中截面公式.

2. 把棱台还原成棱锥常有利于解决有关棱台问题.

例 5 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是直角梯形，腰 DA 垂直底边，PD 为棱锥的高，$PD=AD=AB=2CD=1$. 求二面角 $A-PB-C$ 的大小.

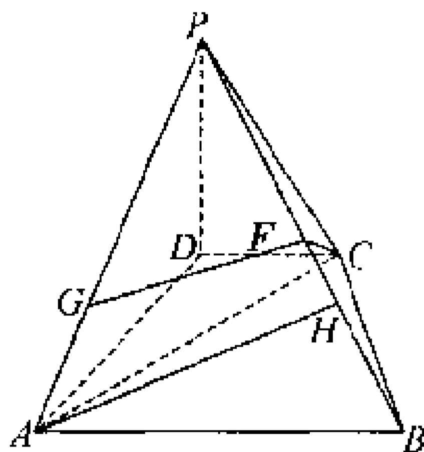


图 15-8

分析一 二面角 $A-PB-C$ 的大小可用它的平面角度量，作 $CF\perp BP$，交 BP 于 F，又在面 ABP 内作 $FG\perp PB$，交 AP 于 G，再设法计算 $\angle GFC$ 的大小，为此先求 CF、FG、CC，进面运用余弦定理求得 $\angle GFC$ 的大小. 经上述途径可达目的，只是计算较为繁难. 是否仅此一法别无他途呢？改变一下观察和思考角度. 如图 15-8，作 $AH\perp BP$，交 BP 于 H. 显然异面直线 AH 与 CF 所成角等于 $\angle CFG$，即为二面角 $A-PB-C$ 的平面角，联想到异面直线上两点间距离公式即可求解.

易知 $PC=\frac{\sqrt{5}}{2}$、$BC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$PA=\sqrt{2}$，$PB=\sqrt{3}$，$CF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

在 Rt△PAB 中，由

$$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}PA\cdot AB=\frac{1}{2}PB\cdot AH,$$

解得 $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$，且

$$FH=PH-PF=\frac{PA^2}{PB}-PF=\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

根据异面直线上两点距离公式，有

$$AC=\sqrt{AH^2+HF^2+CF^2-2AH\cdot CF\cos\angle CFC}. \quad ①$$

将上述有关量代入①，即得 $\cos\angle CFG=0$，这说明 $\angle CFG=90^\circ$，所求二面角 $A-PB-C$ 为直二面角.

分析二 注意到 $PC=BC=AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$，那么点 C 在平面 PAB 内射影

应是$\triangle ABP$的外心,对于直角三角形ABP而言,外心即斜边中点,所以$CF\perp$平面PAB,平面$CPB\perp$平面APB,所求二面角为直二面角.

例 6 如图 15-9,三棱台$ABC-A_1B_1C_1$中,侧棱$CC_1\perp$底面ABC,$\angle ACB=120°$,$AC=a$,$BC=2a$,$B_1C_1=a$,直线AB_1与CC_1所成的角为$60°$.

(1) 求二面角B_1-AC-B的大小;

(2) 求点B到平面B_1AC的距离.

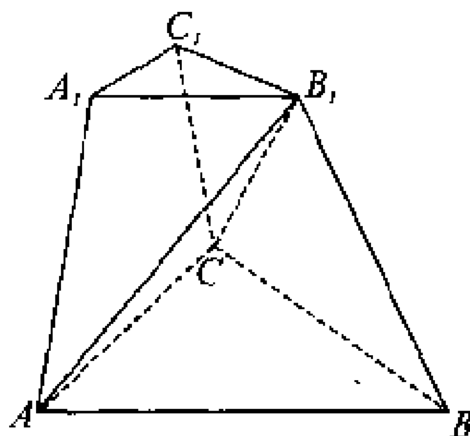


图 15-9

解 (1) 如图 15-10 作$B_1D/\!/C_1C$交BC于D.连AD,则$\angle AB_1D$为异面直线AB_1与CC_1所成的角.有$\angle AB_1D=60°$,因$C_1C\perp$平面ABC,所以$B_1D\perp$平面ABC.

在平面ABC内作$DE\perp AC$于E,连B_1E,则$B_1E\perp AC$于E,$\angle B_1ED$为二面角B_1-AC-B的平面角.在$\triangle ACD$中,

$$AD=\sqrt{AC^2+DC^2-2AC\cdot DC\cos120°}=\sqrt{3}a.$$

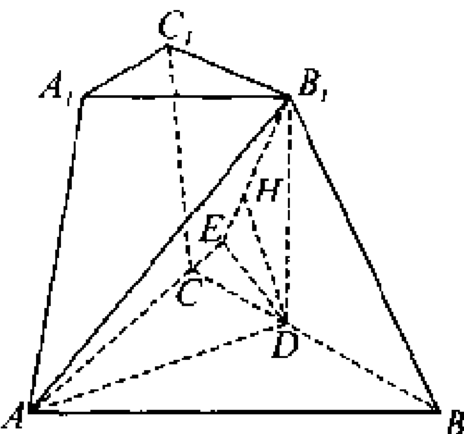


图 15-10

在$\text{Rt}\triangle AB_1D$中,$B_1D=AD\cdot\cot60°=a$.

在$\text{Rt}\triangle CDE$中,$DE=CD\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

在$\text{Rt}\triangle B_1DE$中,$\tan\angle B_1ED=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因此二面角B_1-AC-B的大小为$\arctan\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2) 因D为BC中点,故B到平面B_1AC的距离等于D点到平面B_1AC的距离的 2 倍,作$DH\perp B_1E$于H.由(1)有$DH\perp$平面B_1AC,所以DH为D到平面B_1AC的距离.

在$\text{Rt}\triangle B_1DE$中,

$$DH=\frac{DE\cdot DB_1}{EB_1}=\frac{DE\cdot DB_1}{\sqrt{DE^2+DB_1^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}a.$$

所求 B 到平面 B_1AC 的距离为 $2DH=\frac{2\sqrt{21}}{7}a$.

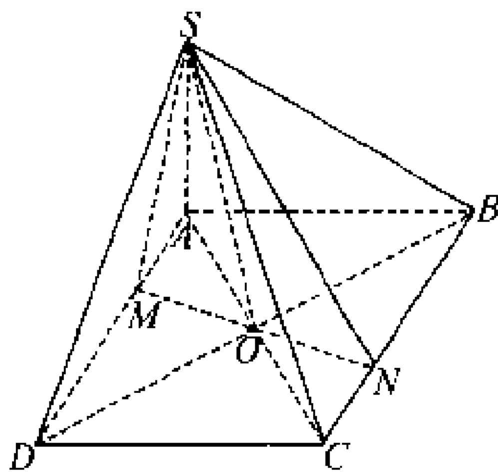


图 15 - 11

例 7 如图 15-11，棱锥 $S-ABCD$ 的底面是中心为 O 的矩形 $ABCD$，$AB=4$，$AD=12$，$SA=3$，$SB=5$，$SO=7$，过顶点 S、底面中心 O 和棱 BC 上一点 N 作棱锥的截面. 问 BN 为何值时，所得截面△SMN 的面积取得最小值？这个截面△SMN 的面积的最小值是多少？

分析一 依题设可知 $SA^2+AB^2=SB^2$，$SA^2+AO^2=SO^2$，有 $\angle SAB=90°$，$\angle SAO=90°$，故 $SA\perp$ 面 $ABCD$，于是，$SA\perp AD$，$SA\perp BC$，又 $CB\perp AB$，$DA\perp AB$，因此 $CB\perp$ 平面 SAB、$DA\perp$ 面 SAB，$\angle NBS=90°$，$\angle SAM=90°$.

设 $BN=x$，由底面矩形关于 O 点的中心对称性可知，

$$AM=CN=BC-BN=12-x,$$

$$SN=\sqrt{SB^2+BN^2}=\sqrt{25+x^2},$$

$$SM=\sqrt{SA^2+AM^2}=\sqrt{x^2-24x+153},$$

$$\cos\angle DBC=\frac{BC}{BD}=\frac{12}{4\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{10},$$

$$\begin{aligned}ON&=\sqrt{OB^2+BN^2-2\cdot OB\cdot BN\cos\angle DBC}\\&=\sqrt{40+x^2-2\cdot 2\sqrt{10}x\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}}\\&=\sqrt{40+x^2-12x},\end{aligned}$$

$$MN=2ON=2\sqrt{x^2-12x+40}.$$

于是 $$\cos\angle MSN=\frac{SM^2+SN^2-MN^2}{2SM\cdot SN}$$

$$=\frac{-x^2+12x+9}{\sqrt{x^2-24x+153}\cdot\sqrt{25+x^2}},$$

进而,有

$$\sin\angle MSN=\sqrt{1-\cos^2\angle MSN}$$

$$=\sqrt{1-\frac{(-x^2+12x+9)^2}{(x^2-24x+153)(25+x^2)}}.$$

所以,

$$S_{\triangle SMN}=\frac{1}{2}SM\cdot SN\cdot\sin\angle MSN$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-24x+153}\cdot\sqrt{25+x^2}$$

$$\sqrt{\frac{(x^2-24x+153)(25+x^2)-(-x^2+12x+9)^2}{(x^2-24x+153)(25+x^2)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x^2-24x+153)(25+x^2)-(-x^2+12x+0)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{52x^2-816x+3744}$$

$$=\sqrt{13x^2-204x+936}$$

$$=\sqrt{13(x-\frac{102}{13})^2+\frac{1764}{13}}.$$

当 $x=\frac{102}{13}$时,即 $BN=\frac{102}{13}$时,截面$\triangle SMN$ 面积取得最小值.这个最小值是$\sqrt{\frac{1764}{13}}=\frac{42\sqrt{13}}{13}$.

分析二 依题设可知,同分析一,$CB\perp$面 SAB,$DA\perp$面 SAB.因此,过 S、O 点的截面 SMN 在面 SAB 上的投影是$\triangle SAB$,根据面积射影定理,要使截面$\triangle SMN$ 面积最小,只须面 SMN 与面 SAB 之间的二面角的平面角 α 最小.

设截面 SMN 交平面 ASB 于直线 LT(图 15-12). 作 $OE\perp AB$ 于 E, $EQ\perp LT$ 于 Q, 则 $\angle OQE=\alpha$. 且 $\tan\alpha=\frac{OE}{EQ}$. 根据 $\tan\alpha$ 的单调性, 且 $EQ\leqslant ES$, 当 Q 与 S 重合时, 取等号. 故当 Q 与 S 重合时, α 最小. 因为 $SE=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$, $\cos\alpha=\frac{SE}{SO}=\frac{\sqrt{13}}{7}$. 所求截面的最小值为

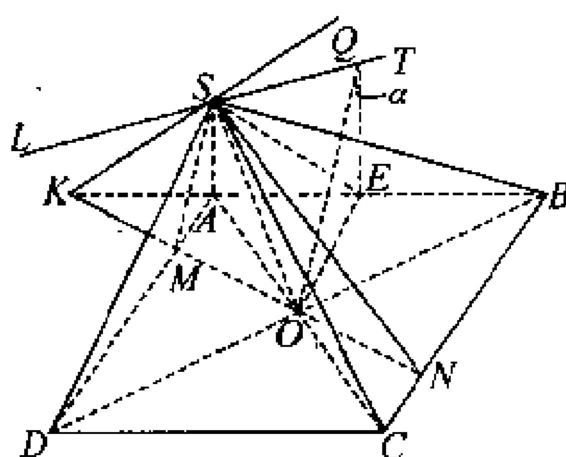


图 15-12

$$\frac{S_{\triangle SAB}}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{2}\times3\times4}{\frac{\sqrt{13}}{7}}=\frac{42}{\sqrt{13}}=\frac{42\sqrt{13}}{13},$$

对应的点 N 在 BC 上的位置可如下法求得: 如图, 在 Rt$\triangle ESK$ 中,

$$KA=\frac{SA^2}{AE}=\frac{9}{2},$$

又 $\triangle EKO\backsim\triangle BKN$, 有

$$\frac{OE}{BN}=\frac{KE}{KB},$$

故 $$BN=\frac{OE\cdot KB}{KE}=\frac{6\times\frac{17}{2}}{\frac{13}{2}}=\frac{102}{13}.$$

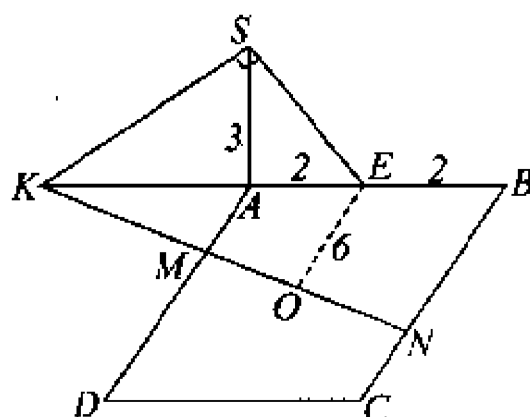


图 15-13

例 8 已知四面体 $ABCD$, E、F、G 分别在棱 AB、AC、AD 上, 记 $\triangle XYZ$ 的面积为 $S_{\triangle XYZ}$, 周长为 $P_{\triangle XYZ}$, 求证:

(1) $S_{\triangle EFG}\leqslant\max\{S_{\triangle ABC},S_{\triangle ABD},S_{\triangle ACD},S_{\triangle BCD}\}$;

(2) $P_{\triangle EFG}\leqslant\max\{P_{\triangle ABC},P_{\triangle ABD},P_{\triangle ACD},P_{\triangle BCD}\}$.

证明 先给出两个引理.

引理 1 给定空间两直线 l、m, 设 P、Q、R 为 l 上顺次三点, 它

们到直线 m 的距离依次为 d_1, d_2, d_3，则 $d_2 \leqslant \max\{d_1, d_3\}$.

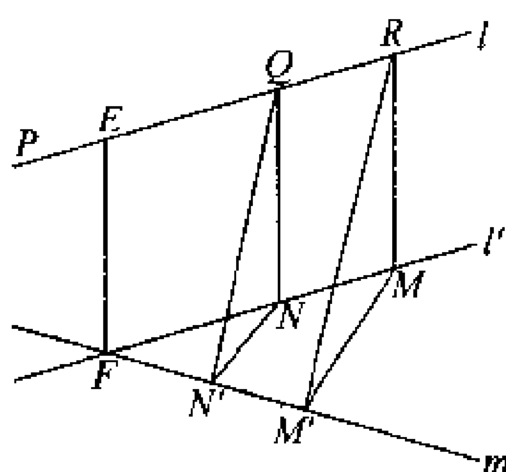


图 15－14

事实上，如图 15-14，取 l、m 的公垂线 EF，$E \in l$，$F \in m$. 过 F 作 $l' \parallel l$. P、Q、R 三点中至少有两点，不妨设为 Q、R 位于 E 同侧. 它们在 l' 上射影 N、M，在 m 上射影 N'、M'. 显然 $QN' \leqslant RM'$，即 $d_2 \leqslant d_3$，命题成立. 特别地，Q 与 E 重合，$d_2 = EF$.

引理 2 给定两直线 l，m 及 l 上两点 M、N. 设 P、Q，R 为 m 上顺次三点，则

$$QM + QN \leqslant \max\{PM + PN, RM + RN\}$$

如图 15-15，通过将 N 点绕直线 m 旋转到平面 PQM 上 N' 处，且 N' 与 M 分别位于直线 m 两侧，则点 Q 必落入$\triangle PMN'$或$\triangle RMN'$的内部或边界上，命题显然成立.

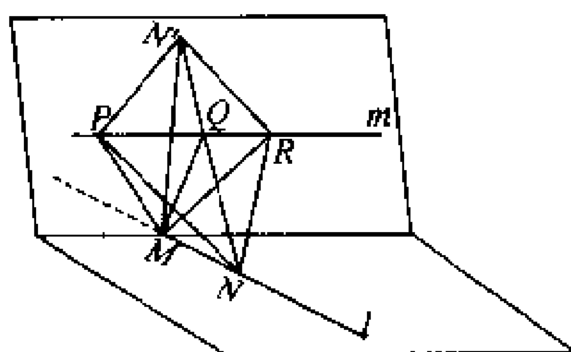


图 15－15

再回到原命题. 设$\triangle EFG$ 所在平面为 π. 不妨设 B 点到 π 的距离最小，过 B 点作平行于 π 的平面 π'，π' 与四面体 $ABCD$ 交成$\triangle BF'G'$，其中 F' 位于 AC 上，G' 位于 AD 上，于是有 $BF' \parallel EF$，$BG' \parallel BG$，$F'G' \parallel EG$，$\triangle EFG \backsim \triangle BF'G'$. 显然

$$S_{\triangle EFG} < S_{\triangle BF'G'},$$

$$P_{\triangle EFG} < P_{\triangle BF'G'}.$$

所以我们只须证明$\triangle BF'G'$满足(1)，(2)即可.

如图 15-16，连 $F'D$，设 A、G'、D 到 BF' 的距离分别为 d_1、d_2、d_3 则由引理 1 知

$$d_2 \leqslant \max\{d_1, d_3\},$$

从而

$$S_{\triangle BF'G'} \leqslant \max\{S_{\triangle BF'A}, S_{\triangle BF'D}\}$$

$$\leqslant \max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BF'D}\}.$$

同理可证

$$S_{\triangle BF'D} \leqslant \max\{S_{\triangle ABD}, S_{\triangle BCD}\}.$$

所以

$$S_{\triangle BF'G'} \leqslant \max\{S_{\triangle ABC}, S_{\triangle ABD}, S_{\triangle ACD}, S_{\triangle BCD}, \}.$$

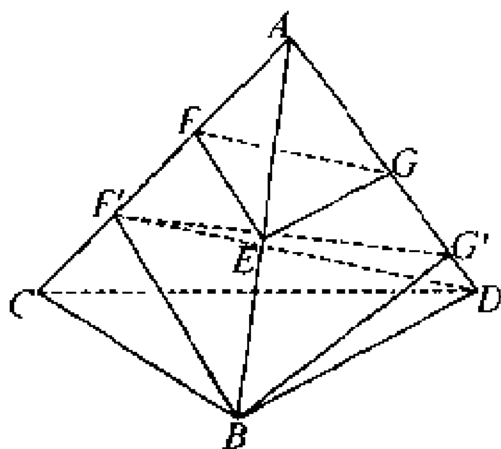


图 15－16

问题(1)得证.

运用引理 2 易得

$$P_{\triangle BF'G'} \leqslant \max\{P_{\triangle ABF'}, P_{\triangle BDF'}\}$$

$$\leqslant \max\{P_{\triangle ABC}, P_{\triangle ABD}, P_{\triangle BCD}\}$$

$$\leqslant \max\{P_{\triangle ABC}, P_{\triangle ABD}, P_{\triangle ACD}, P_{\triangle BCD}\}.$$

问题(2)得证.

例 9 一个凸多面体有 32 个面,每个面或是三角形或是五边形,对于 V 个顶点每一个顶点均有 T 个三角形面和 P 个五边形面相交,求 $100P + 10T + V$.

解 因 $F = 32$,根据欧拉公式,有

$$32 - E + V = 2.$$

所以

$$E = V + 30. \quad ①$$

因为 $T + P$ 个面相交于每个顶点,每个顶点出发有 $T + P$ 条棱,所以

$$2E = V(T + P). \quad ②$$

由①,②得

$$V(T + P) = 2(V + 30),$$

即

$$V(T + P - 2) = 60. \quad ③$$

由于每个三角形面有 3 条棱,故三角形面共有$\frac{VT}{3}$个.类似地,五

边形有$\frac{VP}{5}$个,又因为每个面或者是三角形或者是五边形,所以

$$V(\frac{T}{3}+\frac{P}{5})=32. \quad ④$$

由③,④可得

$$3T+5P=16 \quad ⑤$$

$T=P=2$ 是⑤的惟一非负整数解,代入③得 $V=30$.所以

$$100P+10T+V=250.$$

例 10 一个凸多面体有 12 个面,且

(ⅰ) 所有面都是等腰三角形;

(ⅱ) 棱的长度只有 x 和 y 两种;

(ⅲ) 共一顶点的棱的数目是 3 或 6;

(ⅳ) 所有的二面角都相等.

求$\frac{x}{y}$的值.

解 所给多面体只有$\frac{3\times 12}{2}=18$ 条棱.根据欧拉公式知其有 8 个顶点.设引出 3 条棱的顶点有 μ 个,引出 6 条棱的顶点有 ν 个,则

$$\begin{cases}\mu+\nu=8,\\ 3\mu+6\nu=36,\end{cases}$$

解得 $\mu=\nu=4$.

记 A、B、C、D 是引出 3 条棱的顶点,E、F、G、H 是引出 6 条棱的顶点.注意到多面体的每个面是三角形,E、F、G,H 中任一点至少还与另二点有棱相连,故 E、F、G、H 构成四面体.此外,从顶点 E、F、G、H 还须引出 12 条棱与 A、B、C、D 相连,故 A、B、C、D 之间不存在相连的棱,且它们中任二点都不能与 E、F、G、H 中相同三点间有相同的棱.否则,不妨设 A、B 与 E、F、G 有棱相连,那么 H 仅能与 C、D 间有相连的棱,这样一来,在多面体中从 H 引出的棱至多 5 条,矛盾.

下面证明 $AE=AF=AG$.若不然,不妨设 $AE=AF=x$,$AG=y$,x

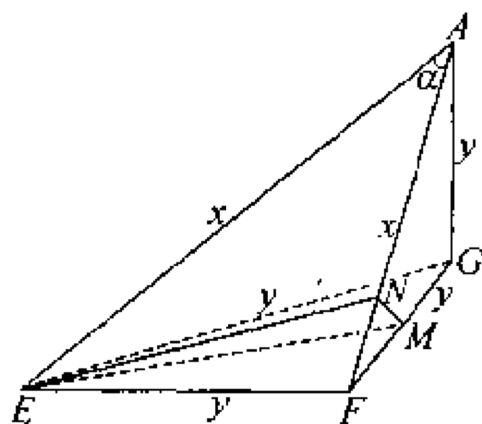


图 15-17

$\neq y$(如图 15-17)根据(iv),有二面角 $F-EA-G$ 与二面角 $F-AG-E$ 相等,易知 $\angle EAF=\angle FAG$. 同样有 $\angle EAG=\angle EAF$. 设 $\angle EAF=\alpha$. 若 $EF=x$,则 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 注意到(i),可知 $AE=AF=AG$,矛盾. 故 $EF=y$,若 $FG=x$,则 $\triangle EAF\cong\triangle AFG$,从而有 $\angle AFG=\angle EAF=\angle FAG$,$x=y$,矛盾. 所以 $FG=y$. 同理 $EG=y$.

设 $\lambda=\frac{y}{x}$,分别由 $\triangle EAF$ 和 $\triangle AGF$ 得 $y=2x\sin\frac{\alpha}{2}$,$x=2y\cos\alpha$,联立可得 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$,$\alpha=\frac{\pi}{5}$ 及 $\lambda=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\cos\alpha=\frac{1}{2\lambda}$.

显然,E,F 在 AG 上射影为同一点,记作 R,则 $\angle ERF$ 为二面角 $E-AG-F$ 的平面角,根据余弦定理,有

$$\cos\angle ERF=\frac{(y\sin\frac{2\pi}{5})^2+(y\sin\frac{2\pi}{5})^2-y^2}{2(y\sin\frac{2\pi}{5})^2}=\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{1+\cos\frac{\pi}{5}}$$

$$=\frac{1}{1+2\lambda}>0. \qquad ①$$

设 M 是 FG 的中点,过 M 作 FG 的垂线交 AF 于 N,则二面角 $E-FG-A$ 的平面角是 $\angle EMN$. 根据余弦定理,有

$$\cos\angle EMN=\frac{MN^2+EM^2-EN^2}{2MN\cdot EM}, \qquad ②$$

及

$$EN^2=NF^2+EF^2-2NF\cdot EF\cos\frac{2\pi}{5}, \qquad ③$$

由②,③得

$$\cos\angle EMN=\frac{\frac{y^2}{4}(4\lambda-1)^2+\frac{3}{4}y^2-y[\lambda^2+1-2\lambda(\frac{1}{2\lambda}^2-1)]}{2\cdot\frac{y}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}y}$$

$$=\frac{3\lambda-2}{\sqrt{3}\lambda\tan\frac{\pi}{5}}<0. \qquad ④$$

由①,④可知二面角 $E-AG-F$ 小于二面角 $E-FG-A$,与(ⅳ)矛盾.

由上述推导知 $AE=AF=AG$.

不妨设 $AE=AF=AG=x$,则 $EF=FG=GF=y$.对 B、C、D 进行类似讨论,可知多面体是由一个棱长为 y 的正四面体 $EFGH$ 及由四面体 $EFGH$ 的每个面再向外作一个侧棱长为 x 的三棱锥所构成(如图 15-18).

因 $EG=EH$,$CG=CH$,故 EC 在 GH 的中垂面上,有 $HG\perp EC$,作 GQ 垂直并交 EC 于 Q,连 HQ.则 $QH\perp EC$,$\angle GQH$ 为二面角 $G-EC-H$ 的平面角.取 EG 中点 P,连 AP、CP,因 $AE=AG=CE=CG$,故 $AP\perp EG$,$CP\perp EG$,$\angle APC$ 是二面角 $A-EG-C$ 的平面角,由(ⅳ)知$\angle GQC=\angle APC$,有等腰三角形 APC 与等腰三角形 GQH 相似,可得

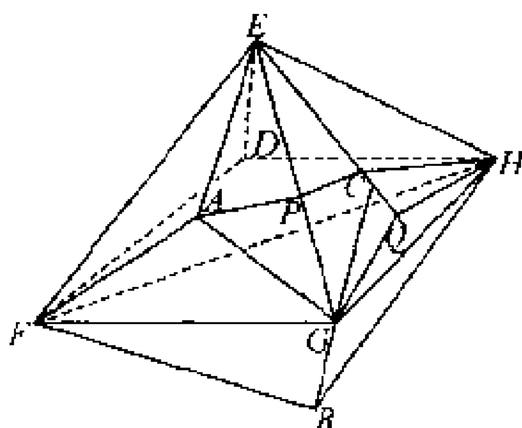


图 15－18

$$\frac{AC}{GH}=\frac{CP}{GQ},$$

又 $Rt\triangle ECP\backsim Rt\triangle EGQ$,有

$$\frac{CP}{GQ}=\frac{EC}{EG},$$

故 $\frac{AC}{GH}=\frac{EC}{EG}$.

因 $GH=EG=y$,故 $AC=EC=x$.由对称性可知正四面体 $EACD$

为正四面体，棱长为 x．过 A、C、D 作平面分别交 EF、FG，EH 于 F'、G'、H'．由对称性可知平面 ACD // 平面 FGH．因此四面体 $EF'G'H'$ 也是正四面体．两正四面体 $EF'G'H'$，$EACD$ 具有相等的高，它们的棱也相等．六边形 $AF'DH'CG'$ 为正六边形，且 $FF' = FA = x$，如图 15-19．设 $\angle AFE = \theta$，则

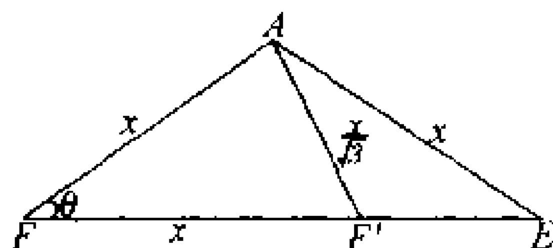


图 15－19

$$\frac{y}{2x} = \cos\theta, \tag{4}$$

$$\frac{x}{2\sqrt{3}x} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right). \tag{5}$$

由④，⑤可得 $\frac{y}{x} = \frac{5}{3}$．

所求比值为 $\frac{5}{3}$ 或 $\frac{3}{5}$．

练 习 十 五

一、选择题

1．下面四个命题中正确的是 （　　）．

(A)底面是正多边形的棱锥一定是正棱锥

(B)所有侧棱长相等的棱锥一定是正棱锥

(C)各侧面和底面所成的二面角都相等的棱锥一定是正棱锥

(D)底面是正三角形，底面的一个顶点在所对侧面上的射影是该侧面垂心的棱锥是正棱锥

2．下面五个命题：

①棱台的两条不相邻的侧棱所在直线可以是异面直线；

②四条侧棱都相等的棱台一定是正四棱台；

③棱台的高可以和它的某一条侧棱长相等；

④两底面平行且为相似正多边形的棱台一定是正棱台；

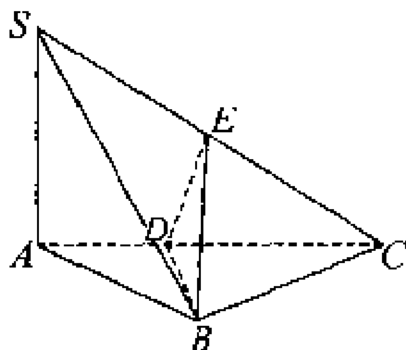
⑤有两个面是相互平行的相似多边形且其余各面都是梯形的多面体一定是棱台.

其中正确的命题个数是 ( ).

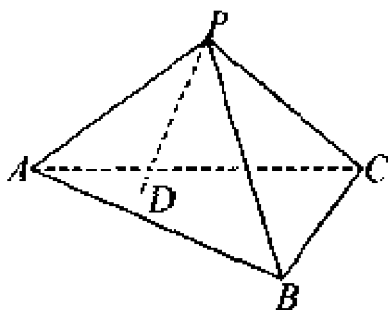
(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

3. 如图，三棱锥 $S-ABC$ 中，$SA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，$SA=AB$，$SB=BC$，E 为 SC 中点，$ED\perp SC$ 交 AC 于 D. 则二面角 $E-DB-C$ 的度数为 ( ).

(A)30° (B)45° (C)60° (D)75°



(第 3 题)



(第 4 题)

4. 如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90°$，$D$ 为底面 ABC 内一点，$\angle APD=45°$，$\angle BPD=60°$，则$\angle CPD$ 等于 ( ).

(A)30° (B)90° (C)45° (D)60°

5. 在四面体 $ABCD$ 中，面 ABC 及 BCD 都是边长为 $2a$ 的等边三角形，且 $AD=2\sqrt{2}a$，M、N 分别为棱 AB、CD 的中点，由 M 沿四面体表面至 N 的最短距离为. ( ).

(A)$2a$ (B)$\frac{3}{2}a$ (C)a (D)$\frac{5}{2}a$

6. $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位正方体. 黑白二蚁都从点 A 出发沿棱向前爬行，每走完一条棱称为“走完一段”. 白蚁爬行的路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots$，黑蚁爬行路线是 $AB\to BB_1\to\cdots$，它们都遵循如下规则：

所爬行的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须是异面直线(其中 i 是自然数).设白、黑二蚁走完第 1990 段后各停止在正方体的某个顶点处,这时黑、白二蚁的距离是 ( ).

(A)1　　(B)$\sqrt{2}$　　(C)$\sqrt{3}$　　(D)0

二、填空题

7.如果正六棱锥侧面的顶角等于侧棱和底面所成的角,那么这个角的值等于______.

8.三棱锥 $S-ABC$ 的底面是正三角形,A 点在侧面 SBC 上的射影 H 是$\triangle SBC$ 的垂心,且二面角 $H-AB-C$ 的大小为 30°,则 $SA:AB=$______.

9.平行光线照射到一个棱长为 1 的正方体上,在正方体后面的平面上留下的影子的面积为 S,则 S 的最大值为______.

10.正十二面体有 20 个顶点,30 条棱,每一个顶点是 3 条棱的交点,这 3 条棱的另一端点是正十二面体的另外 3 个顶点,我们称这 3 个顶点与前一个顶点是相邻的.在每个顶点处放上一个实数,要求每个顶点所放的实数恰是与该顶点相邻的 3 个顶点处所放实数的算术平均值,设 M,m 分别是这 20 个实数中最大的和最小的,则 $M-m$ 的取值范围是______.

三、解答题

11.平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长都相等,且 $\angle B_1C_1D_1=\angle CC_1B_1=\angle CC_1D_1=60^\circ$.

(1)求证:平面 $ACC_1A_1\perp$平面 BB_1D_1D;

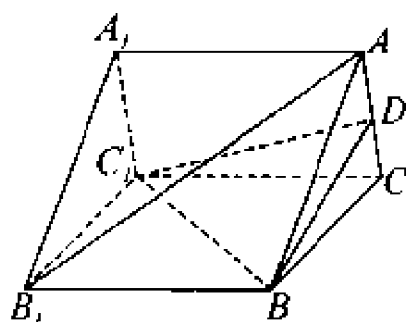
(2)若 $AA_1=a$,求 C 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离.

12.三棱锥 $S-ABC$ 的底面三角形中,$\angle ABC=90^\circ$,$\tan\angle CAB=\frac{\sqrt{6}}{3}$,侧棱 SA,SB,SC 对底面所成的角都是 45°,求棱锥侧面 SAC 与 SBC 所成二面角 $A-SC-B$ 的度数.

13.如图,$ABC-A_1B_1C_1$ 是正三棱柱,D 是 AC 中点.

(1)证明:$AB_1//$平面 DBC_1.

(2) 若 $AB_1 \perp BC_1$. 求二面角 $C-BC_1-D$ 的度数.



14. 已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面与底面的夹角 α，相邻两侧面的夹角 β. 求证: $\cos\beta=-\cos^2\alpha$.

15. 四面体中三个顶点处的每三个面角之和均为 180°. 证明，这个四面体的对棱相等.

16. 四面体 ABCD 的所有二面角皆为锐角，相对的棱都两两相等，该四面体的 6 个二面角的平面角为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,6)$，试求 $\sum_{i=1}^{6}\cos\alpha_i$.

17. 求证:(1) 所有的界面都是边数相同的多边形，且所有的多面角棱数相同的多面体有五种，并且只有五种.

(2) 正多面体只有五种: 正四面体、正六面体(正方体)、正八面体、正十二面体及正二十面体.

第十六讲　旋转体

知识点和方法述要

名称	圆　柱	圆　锥	圆　台
图　形			
定义	以矩形一边所在直线为轴，其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体	以直角三角形一直角边所在直线为轴，其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体	以直角梯形垂直于底边的腰所在的直线为轴，其余各边旋转而成的曲面所围成的几何体
性质 截面	平行底面的截面与底面是全等的圆面	平行于底面的截面有：$S_{截}:S_{底}=h_1^2:h^2$，h_1 为顶点到截面的距离	中截面的面积有：$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S_{上}}+\sqrt{S_{下}}$
	轴截面是全等的矩形	轴截面是全等等腰三角	轴截面是全等等腰梯形
侧面展开图			
		扇形圆心角 $\theta=\dfrac{2\pi r}{l}=2\pi\cos\alpha$ α：母线与底面所成角	扇形圆心角 $\theta=\dfrac{2\pi(R-r)}{l}=2\pi\cos\alpha$ α：母线与底面所成的角
侧面积	$S_{侧}=cl=2\pi rl$	$S_{侧}=\dfrac{1}{2}cl=\pi rl$	$S_{侧}=\dfrac{1}{2}(c+c')l=\pi(R+r)l$

名称	球	球面
图形		
定义	半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所得的几何体叫做球 半圆的圆心叫做球心，连结球心和球面上任一点的线段叫做球半径	半圆以它的直径为旋转轴，旋转一周所成的曲面叫做球面 球面被经过球心的平面所截得圆叫做球的大圆
性质 截面	球心和截面圆心的连线垂直于截面 球心到截面的距离 d 与球半径 R 及截面半径 r 的关系：$R^2=d^2+r^2$	球面上两点之间的最短距离是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，叫做球面距离，它是球面上这两点间的最短距离
侧面积		$S_{球面}=4\pi R^2$

注　1.利用轴截面与侧面展开图是集中相关元素，将有关圆柱、圆锥、圆台的空间问题平面化的重要手段.通常将圆柱、圆锥、圆台或它们的轴截面与侧面展开图二者画在一起，更有助于了解各元素之间关系.

2.球面上两点的球面距离与球面上两点的距离是不同的概念、不要混淆不清.求球面距离时，用好两个截面，即过球面两点的大圆截面和小圆截面.抓住它的边角的互相联系.计算 A,B 两点间的球面距离，一般分三个步骤：(1)计算线段 AB 的长；(2)计算圆心角 $\angle AOB$；(3)计算大圆上 A、B 两点间劣弧长.

例 题 精 讲

例1 已知圆台的两底面的半径之差是5，高是$5\sqrt{15}$，侧面积为300π，M是一条母线A_1A_2的中点（A_2在下底圆周上），从M拉一条绳子绕圆台侧面转到A_2.

(1) 求绳子的最短长度；

(2) 此状态时，绳子上的点和圆台上底圆周上点之间的距离中最短的是多少？

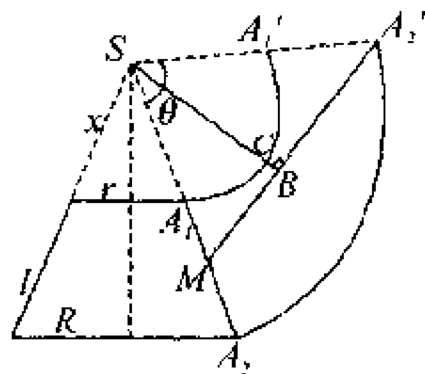


图 16－1

解 (1) 设圆台上、下底面半径为r，R，高为h，母线长为l，侧面展开图扇形的圆心角（即圆台侧面展开后所得扇环的圆心角）为θSA_1为x，如图16-1，则

$$2\pi R=\theta(l+x), \quad ①$$

$$2\pi r=\theta x. \quad ②$$

①－②，即得

$$\theta=\frac{R-r}{l}\cdot 2\pi, \quad ③$$

依题设，有

$$\pi(R+r)l=300\pi, \quad ④$$

$$R-r=5, \quad ⑤$$

$$h^2+(R-r)^2=l^2, \quad ⑥$$

又$h=5\sqrt{15}$，由④，⑤，⑥可得$l=20$，$R=10$，$r=5$，代入③得$\theta=\frac{\pi}{2}$，再由②得$x=20$，故所求绳子的最短长度为展开图中

$$A'_2M=\sqrt{\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+(x+l)^2}=50.$$

(2) 作$SB\perp A'_2M$，SB交A'_2M于B，交上底面于C，BC为绳子与上底面圆周上点之间的最短距离.

在 Rt△ SA'_2M 中,由

$$S_{\triangle SA'_2M}=\frac{1}{2}A'_2M\cdot SB=\frac{1}{2}SA'_2\cdot SM,$$

可得
$$SB=\frac{SA'_2\cdot SM}{A'_2M}=\frac{40\times 30}{50}=24,$$

故
$$BC=SB-SC=24-20=4.$$

即绳子与上底面圆周上点之间最短距离为 4.

注 (1)在例 1 的推导中,实际上得到了圆台展开后所得扇环的圆心角 θ 与上、下底面半径 r、R,母线长 l 的重要关系式:

$$\theta=\frac{R-r}{l}\cdot 2\pi.$$

(2)关于柱、锥、台的计算,要灵活运用代数、三角工具,注意运算的合理、简便.

例 2 将一个半径为 R 的半圆面,卷成圆锥的侧面,求:

(1) 这圆锥的母线和高的夹角;

(2) 将所得到的圆锥,在平面上绕它的固定的顶点自身滚动一周,求这圆锥的高所形成的旋转面的面积;

(3) 若从某一位置起,按顺时针方向绕固定的顶点滚动后,又回到原来的位置,求其高扫过的面积.

解 (1) 如图 16-2,设卷成圆锥的底面半径为 r,$\angle AOO_1=\alpha$,由 $2\pi r=\pi R$ 知 $R=2r$,而 $\sin\alpha=\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$,故 $\alpha=30°$.

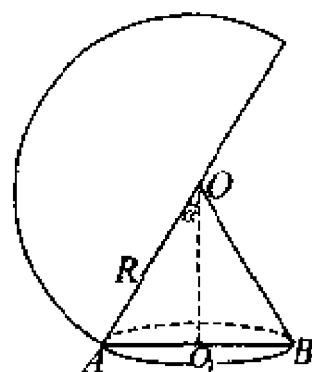


图 16-2

(2) 如图 16-3,圆锥在平面上沿固定顶点自身滚动一周,其母线恰好转过半个圆面,此时高转过的是半个大圆锥的面.

大圆锥的母线 $OO_1=R\cdot\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}R$,大圆锥的底面半径

$$O_1O_2 = OO_1 \cdot \cos 30° = \frac{3}{4}R.$$

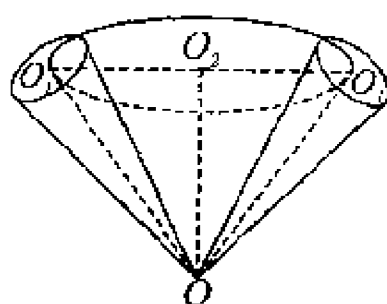


图 16-3

而

$$\frac{1}{2}S_{大圆锥侧} = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{3}{4}R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{3\sqrt{3}}{16}\pi R^2,$$

故自身滚动一周,高所形成的旋转面的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi R^2$.

(3) 若从某一位置开始,按顺时间方向滚动后,又回到原来的位置,则其高所扫过的面积,为整个大圆锥的侧面积,即 $S_{大圆锥侧} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\pi R^2$.

例 3 在三棱锥 $S-ABC$ 中,$SA \perp$ 底面 ABC,侧面 SAB 和侧面 SBC 成直二面角,若$\angle BSC = 45°$,$SB = a$,求经过三棱锥四顶点 A、B、C、S 的球的半径.

解 因 $SA \perp$ 平面 ABC,所以 $SA \perp BC$,$SA \perp AC$,$\triangle SAC$ 为 Rt$\triangle$. 如图 16-4,作 $AD \perp SB$ 交 SB 于 D. 因侧面 SAB 与侧面 SBC 成直二面角,故 $AD \perp$ 平面 SBC,$AD \perp BC$,有 $BC \perp$ 平面 SAD,$\triangle SBC$ 为 Rt$\triangle$,$\angle SBC = 90°$.

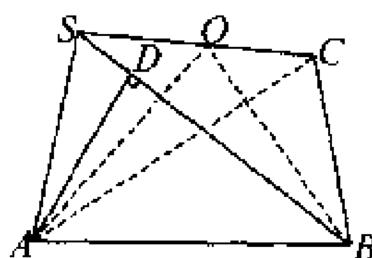


图 16-4

取 SC 中点 O,连接 AO,BO,易知

$$SO = OC = AO = BO,$$

故 O 为经 A、B、C、S 四点的球的球心,该球的半径长为$\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

注 当多面体的各个顶点均在球面上时称多面体内接于球,或称多面体为球的内接多面体,球为多面体的外接球. 这种定义方式可看作平面几何中多边形及其外接圆概念在空间的拓广. 对于其他多面体、旋转体间组合体、切体,这种定义方式的运用相当普遍,这里不再赘述.

例 4 AB 为异面直线 m、n 的公垂线段. $AB = d$,$A \in m$,$B \in n$,

直线 m,n 间夹角为 φ. 在直线 n 上取异于点 B 的另一点 C. 在直线 m 上取异于点 A 的另一点 D, $CD=l$, 试求四面体 $ABCD$ 外接球 O 的半径.

分析 首先确定球心 O 的位置, 如图 16-5. 显然 O 应在线段 AB 的中垂面上, 但仅凭这一点是不够的, 过点 A 作直线 $p\parallel n$, 依题设 m,p 夹角等于 φ, 过点 C 作直线 $CE\parallel BA$, CE 交 p 于 E. 因 AB 是直线 m,n 的公垂线, 故易知 $CE\perp$ 平面 AED, 四边形 $ABCE$ 是矩形. 这矩形的三个顶点 A,B,C 在球面上, 它的第四个顶点也在该球球面上, 这样一来, 点 O 应在过 $\triangle ADE$ 的外心 S 而垂直平面 ADE 的直线上. 至此, 可知点 O 是过 $\triangle ADE$ 外心 S 而垂直平面 ADE 的直线与 AB 中垂面的交点, $OS=\dfrac{d}{2}$.

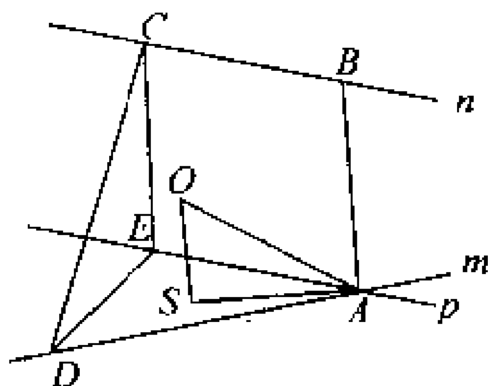


图 16-5

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOS$ 中, OA 为球 O 的半径, SA 为 $\triangle ADE$ 的外接圆半径, 有

$$SA=\frac{DE}{2\sin\angle DAE}=\frac{DE}{2\sin\varphi},$$

$$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{l^2-d^2},$$

所以 $\quad SA=\dfrac{\sqrt{l^2-d^2}}{2\sin\varphi}$.

设球的半径为 r, 则

$$r^2=OA^2=SO^2+SA^2=\frac{d^2}{4}+\frac{l^2-d^2}{4\sin^2\varphi}=\frac{l^2-d^2\cos^2\varphi}{4\sin\varphi}$$

于是 $\quad r=2\csc\varphi\sqrt{l^2-d^2\cos^2\varphi}$. 即为所求.

例 5 连接三角形任一顶点和它的对边上(或延长线上)任一点的线段叫做三角形的截线. 证明, 对于空间中任一锐角三角形, 一定

可以找到这样一点,使得任一截线对于这点所张的角都是直角.

分析 如图 16-6,先从特殊位置考虑起,在空间中,点 P 对截线 AB,AC 张直角,则 $PA\perp$平面 BCD.若点 P 为所求,则同理还有 $PB\perp$平面 APC,$PC\perp$平面 ABP.即以 P 为顶点的三个面角 APB、BPC、CPA 均为直角.反之,若$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=\frac{\pi}{2}$,显然点 P 满足题设要求.

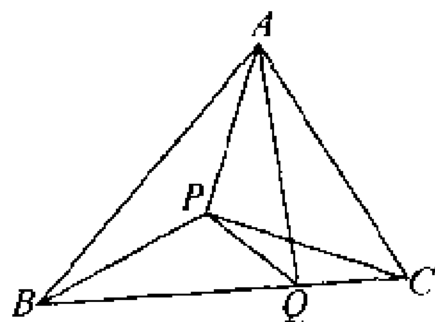


图 16-6

问题在于点 P 是否一定存在? 它等价于分别以 AB、BC、CA 三边为直径的球面是否总存在一公共点.设 O_1、O_2、O_3 分别是 AB、BC、CA 的中点(如图 16-7).注意到球 O_1 与球 O_2 的连心线 O_1O_2 满足

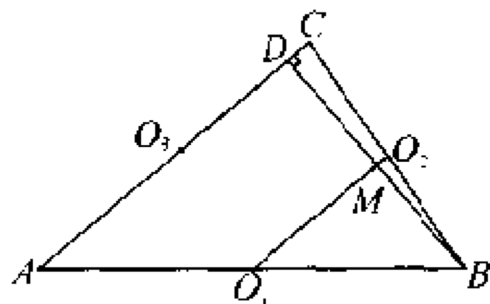


图 16-7

$$O_1O_2<O_1B+O_2B,$$

所以球 O_1,球 O_2 的球面交于过 B 的球小圆,作 $BD\perp AC$,交 AC 于 D,交 O_1O_2 于 M,因为$\angle A$,$\angle C$ 都是锐角,故点 D 在球 O_3 的直径 AC 上,亦在球 O_1 与球 O_2 的球面上,即在球 O_1,O_2 所交球小圆上,因$\angle B$为锐角,故点 B 在以 AC 为直径的球 O_3 的外部.于是球 O_1、O_2 球面所交球的小圆穿过球 O_3 时交点存在,此交点即为所求.

在有关球的竞赛试题中,切球问题占有突出地位.

例 6 若四面体 $ABCD$ 的棱 AB、BC、CD、DA 与一球相切.证明,诸切点落在同一平面上.

分析 如图 16-8.设已知球 O 分别与 AB、BC、CD、DA 相切于 M、N、Q、P,过 M、N、P 作一平面 π,平面 π 必不过 A、B、C、D 中任何一点.事实上,若点 A 在平面 π 上,因 M 在平面 π 上,则 A、B 在平面 π 上,N 在平面 π 上,故 BC 也在平面 π 上.因 D 在平面 π 上,故 AD 也在平面 π 上.从而点 A、B、C、D 共面,与题设相矛盾.因点 M

在AB上，故AB在平面π的异侧，同样B与C，A与D分别在平面π的异侧，CD必与平面π相交，设交点为Q'.

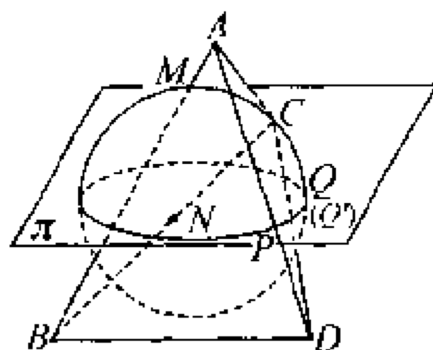


图 16－8

以下应证明的是Q与Q'重合．注意到从球外一点向球引切线，切线长相等，有$AM=AP$，$BM=BN$，$CN=CQ$，$DP=DQ$．现设A'、B'、C'、D'分别是A、B、C、D在平面π上的射影．由$\triangle AMA' \backsim \triangle BMB'$，得

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AA'}{BB'}. \quad ①$$

同理

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BB'}{CC'}, \quad ②$$

$$\frac{CQ'}{DQ'}=\frac{CC'}{DD'}, \quad ③$$

$$\frac{DP}{AP}=\frac{DD'}{AA'}. \quad ④$$

将式①，②，③，④相乘，化简得

$$CQ'\cdot DP=CN\cdot DQ',$$

即

$$(CD-DQ')DQ=(CD-DQ)DQ',$$

推得$DQ=DQ'$，从而有Q与Q'重合．

例 7 圆柱直径为$4R$，高为$22R$．问圆柱内最多能装半径为R的球多少个？

解 如图16-9．最底层恰好能放二球，设为球O_1与球O_2．它们彼此相切，同时与圆柱相切，在球O_1与球O_2上面放上球O_3与球O_4，使O_1O_2与O_3O_4垂直，且这四个球中任二个相切．同样在球O_3和球O_4上面放球O_5和球O_6，…，直到不能再放为止．

显然最底层二个球的球心与圆柱底面相距R．再计算过O_3，O_4与过O_1，O_2两平行圆柱底面的截面间距离．

设球O_1和球O_2相切于A点，因$O_1O_3=2R$，$O_2O_3=2R$，$O_1A=$

$O_2A=R$,所以 $O_3A=\sqrt{3}R$.因球 O_3 与圆柱相切,故 $AB=R$,$O_3B=\sqrt{O_3A^2-AB^2}=\sqrt{2}R$.

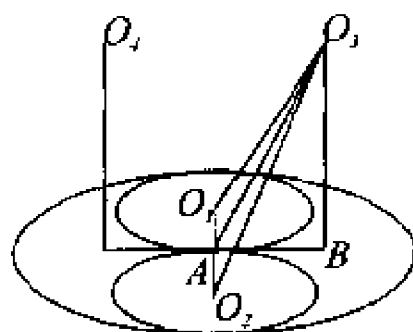


图 16-9

设在球 O_1 和球 O_2 能装 k 层,则 k 满足

$$(22-\sqrt{2})R<R+\sqrt{2}R\cdot k+R\leqslant 22R,$$

解得 $k=14$,所以最多能装 30 个球.

例8 证明,对于任意四面体,不等式 $r<\frac{ab}{2(a+b)}$成立.其中 a,b 是四面体两条相对的棱的长,r 是内切球的半径.

证明 设四面体 $ABCD$ 的 AD 长为 a,BC 长为 b.如图 16-10.过四面体的内切球的球心作平行于 AD 和 BC 的平面,它与四面体相交成平行四边形 $KLMN$.设 $KL=m$,$LM=n$.因 $KL/\!/AD$,$LM/\!/BC$,所以 $\frac{m}{a}=\frac{BL}{BD}$,$\frac{n}{b}=\frac{DL}{BD}$.于是

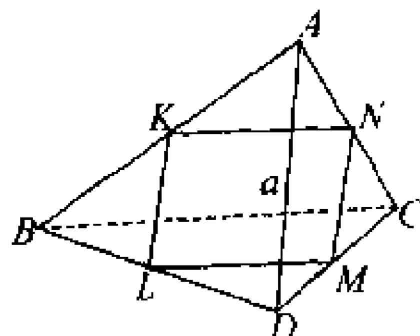


图 16-10

$$\frac{m}{a}+\frac{n}{b}=1.$$

由此得 m,n 中至少有一个不超过$\frac{ab}{a+b}$.

但内切球的一个大圆整个地落在平行四边形 $KLMN$ 的内部,所以其半径 r 不可能大于四边形的任一边的一半,故

$$r\leqslant\frac{ab}{2(a+b)}.$$

还须指出上述不等式中等号不成立.若 $r=\frac{ab}{2(a+b)}$,那么 $m=n=\frac{ab}{a+b}$,这时平行四边形 $KLMN$ 为正方形.因为球的切面垂直于过切点的半径,于是平面 ABD 与平面 ACD 将垂直于同一直线,这不可能.

例 9 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1,求正方体底面 $ABCD$ 的内切圆上的点与过顶点 A、C 和 B_1 的圆上的点之间的最小距离.

解 如图 16-11,设正方体 AC_1 的中心为 O,则 O 到各棱中点的距离均为$\frac{\sqrt{2}}{2}$,O 到各顶点的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.以 O 为球心,以$\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{\sqrt{3}}{2}$为半径作两个球,则 $ABCD$ 的内切圆在小球上,过 A、C、B_1 的圆在大球上,故两圆上点的距离的最小值$\geqslant\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.上述等号能够取得.现以 O 为中心,作变换,将 $ABCD$ 的内切圆投影到大球上,显然投影所得到的圆与过顶点 A、C、B_1 三点的圆相交.不妨设 E 是交点之一.与 E 相对应的 $ABCD$ 的内切圆上点为 E',那么 O、E'、E 三点共线,有 $EE'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,故$\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$为所求最小距离.

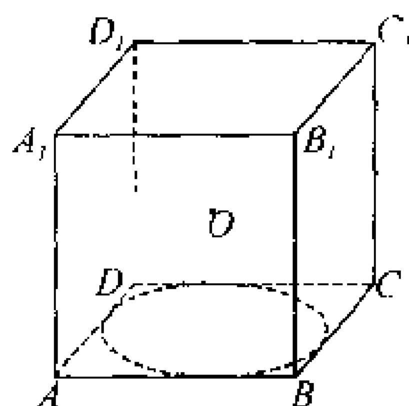


图 16-11

练 习 十 六

一、填空题

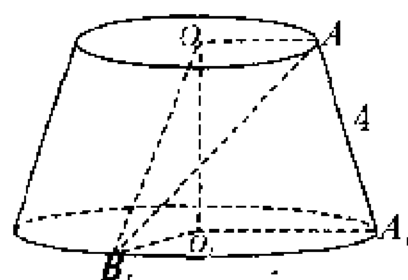
1. 已知球的表面积 2500π,有两个平行截面的面积为 49π,400π,则平行截面间的距离是______.

2. 过球心 O 作一个与该球球面的内接圆锥的底面平行的截面,如果截面恰平分圆锥的侧面积,则圆锥的母线与轴线所成角为______.

3. 位于北纬 $60°$、东经 $17°$ 的海面上 A 处的船要驶向位于同纬度,东经 $137°$的 B 岛,该船航行的最短距离是______.

4. 一个半径为 2cm 的球内切于一个圆台,球面与圆台侧面切于

一个圆.如果过这个圆的平面将球面分为1:4,则圆台的侧面积为______.



(第5题)

5. 如图,已知圆台 OO_1 中,母线 $AA_1=4$, $\angle A_1O_1B_1=90°$, $S_{侧}=24\pi$,圆台的侧面展开图圆心角为 π,异面直线 AB_1 和 O_1A_1 所成的角的正切值为______.

二、解答题

6. 有两个公共点但不共面的二圆在同一球面上,试证明之.

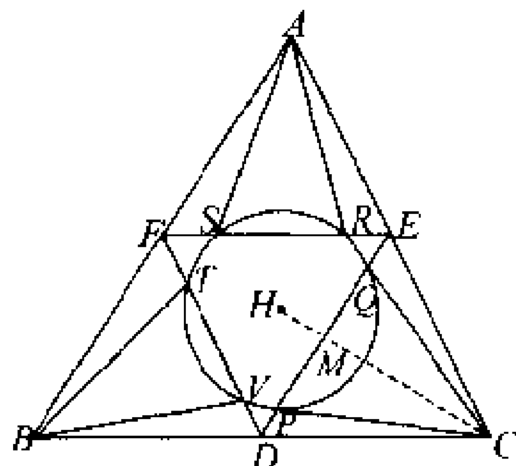
7. 在底半径为 r,轴截面为等边三角形的圆锥内有一个内切球,球与锥侧面交线为一圆,AB 为此圆的直径,求 A 到 B 沿锥面的距离及沿球面的距离.

8. 半径为1的球 O,在球面上有 P、Q 两点,P、Q 间有一条长度小于2的弧落在球内.求证此弧必落在某个半球之内.

9. 证明:若某个几何体被平面所截得的截面都是圆,那么这个几何体是球.

10. 点 P 在直径为1的球面上,过 P 作两两垂直的三条弦,若其中一条弦的长度是另一条的2倍,求这三条弦长和的最大值.

11. 已知一给定平面 M 与球 O 相交于$\odot O'$,在平面 M 的两侧球面上分别有两定点 A, B, $OA\perp$平面 M.过直线 AB 选取任意平面交$\odot O'$于点 X, Y.证明:线段 BX 与 BY 长度之积与所选取的平面无关.



(第12题)

12. 如图,H 为锐角$\triangle ABC$ 的垂心.D, E, F 分别是 BC, CA, AB 边的中点,一个以 H 为中心的圆交 DE 于 P, Q,交 EF 于 R、S,交 FD 于 T、V.求证:$CP=CQ=AR=AS=BT=BV$.

第十七讲　体积的计算

知识点和方法述要

1. 体积的概念与公理

(1) 定义：几何体占有空间部分的大小叫做它的体积.

(2) 棱长等于单位长度的正方体的体积叫做体积单位.

(3) 公理 5　长方体的体积等于它的长、宽、高的积.

$$V_{长方体} = abc.$$

推论 1　长方体的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积.

$$V_{长方体} = Sh.$$

推论 2　正方体的体积等于它的棱长 a 的立方.

$$V_{正方体} = a^3.$$

(4) 公理 6(祖暅原理)　夹在两个平行平面间的两个几何体，被平行于这两个平面的任意平面所截，如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

2. 体积公式

多面体	$V_{棱柱} = Sh$ $V_{棱锥} = \frac{1}{3}Sh$ $V_{棱台} = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$

旋转体	$V_{圆柱}=\pi r^2 h$ $V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ $V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$ $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$ $V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$

3．体积的计算常用到割补的方法．异面直线间距离、平行的直线和平面、平面与平面间的距离可归结到点到平面的距离．利用等体积变换，则是计算点到平面的距离的一条重要途径，常使计算变得十分简便．

例题精讲

例1　如图17-1，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle CAB=60°$，$AC=a$，二面角 $C-A_1B-A$ 为45°，求此直棱柱的体积．

解　过 C 作 $CE\perp AB$，CE 交 AB 于 E．因平面 $A_1B\perp$ 平面 ABC，故 $CE\perp$ 平面 A_1B，过 E 作 $ED\perp A_1B$，ED 交 A_1B 于 D，连 CD，根据三垂线定理知 $CD\perp A_1B$，$\angle CDE$ 为二面角 $C-A_1B-A$ 的平面角，$\angle CDE=45°$．

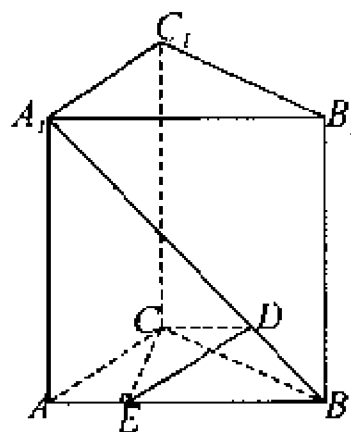


图 17-1

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=60°$，$AC=a$，故 $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$CD=\sqrt{2}CE=\frac{\sqrt{6}}{2}a$．因 $CB\perp AC$，$CB\perp AA_1$，所以 $CB\perp$ 平面 A_1C．

设 $AA_1=x$，则 $A_1C=\sqrt{a^2+x^2}$．在 $Rt\triangle A_1BC$ 中，

$$S_{\triangle A_1BC}=\frac{1}{2}A_1C\cdot BC=\frac{1}{2}CD\cdot A_1B,$$

即得 $$\sqrt{x^2+a^2}\cdot\sqrt{3}a=\sqrt{x^2+4a^2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}a,$$

解之得 $x=\sqrt{2}a$，于是，有

$$V_{直棱柱}=S_{\triangle ABC}\cdot AA_1=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}a\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{2}a^3,$$

即为所求.

例 2 如图 17-2(1)，在边长为 a 的正方形中，剪下一个扇形和一个圆，以此扇形和圆分别作为圆锥的侧面和底面围成圆锥(图 17-2(2))求此圆锥的体积.

解 设扇形半径为 l，圆的半径为 r，则 $\overset{\frown}{CD}=\frac{\pi l}{2}=2\pi r$，故即得 $l=4r$，又 $AB=\sqrt{2}a$，且

$$AB=l+r+\sqrt{2}r=l+(1+\sqrt{2})r,$$

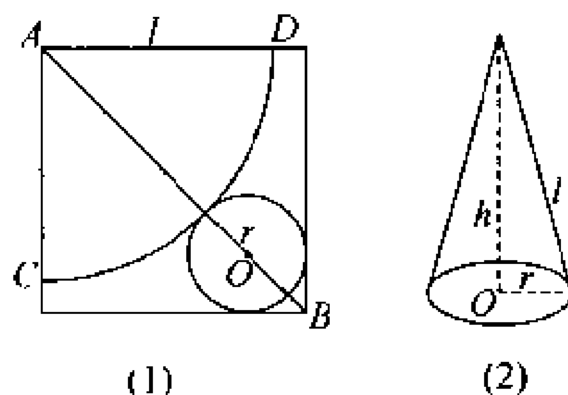


图 17-2

所以 $r=\frac{5\sqrt{2}-2}{23}a$. 因

$$h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{15}r,$$

所以 $$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\sqrt{15}}{3}\pi r^3=\frac{310\sqrt{30}-308\sqrt{15}}{36501}\pi a^3.$$

即为所求.

例 3 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=p$，$BC=q$，异面直线 PA 与 BC 所成的角为 $\theta(\theta\in(0,\frac{\pi}{2}])$，它们之间的距离为 h，求证：

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{6}pqh\sin\theta.$$

证明 如图 17-3，作 $CD \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} BA$，连结 AD、PD，则将三棱锥 $P-ABC$ 补成一个四棱锥 $P-ABCD$，$\angle PAD=\theta$ 或 $\pi-\theta$.

因 $V_{P-ABC}=V_{P-ACD}$，$V_{P-ACD}=V_{C-PAD}$，

$$V_{C-PAD}=\frac{1}{3}S_{\triangle PAD}\cdot h=\frac{1}{6}pqh\sin\theta.$$

故 $V_{P-ABC}=\frac{1}{6}pqh\sin\theta.$

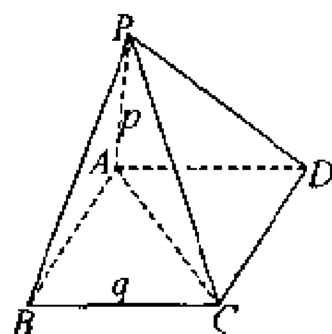


图 17-3

注 1. 上述解答中,"补形"使得有关元素集中,又通过等体积变换而使问题易于解决. 等体积变换的主要方式是:底不变,顶点在平行于底面的直线或平行平面上移动;顶点不变,底在原所在平面上移动(或作等积变换).

2. $V_{P-ABC}=V_{C-APD}$,虽作为四面体没有变,但改变了考察角度,即以$\triangle ACD$为底,P为顶点的三棱锥改为以$\triangle PAD$为底,C为顶点的三棱锥. 而这种变化有时给问题解决带来很大便利. 特别是要求点到平面距离或棱锥的高相等. 下面例4即利用等体积变换的办法求点到面的距离.

3. $\theta=\frac{\pi}{2}$时,$V_{P-ABC}=\frac{1}{6}pqh.$

例4 在棱长为4cm的正方体AC_1中,P、Q分别是棱CD和D_1D的中点,求点P到平面A_1QC_1的距离.

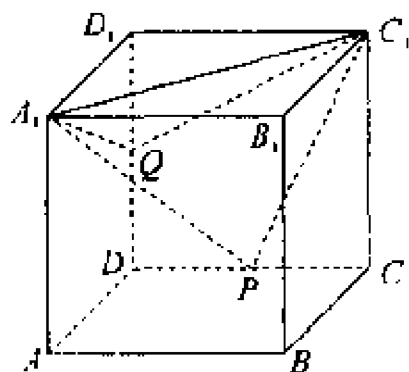


图 17-4

解 如图17-4,设点P到平面A_1QC_1的距离为h. 因为

$$S_{\triangle C_1PQ}=S_{\triangle DD_1C_1C}-S_{\triangle D_1C_1Q}-S_{\triangle C_1CP}-S_{\triangle QDP}$$

$$=C_1C^2-\frac{1}{2}D_1C_1\cdot D_1Q-\frac{1}{2}C_1C\cdot PC-\frac{1}{2}QD\cdot DP$$

$$=16-4-4-2=6(\text{cm}^2),$$

又因$A_1D_1\perp$平面PQC_1,故

$$V_{A_1-PQC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1PQ}\cdot A_1D_1=\frac{1}{3}\times6\times4=8(\text{cm}^3).$$

在$\triangle A_1QC_1$中，因$A_1C_1=4\sqrt{2}\text{cm}$，$A_1Q=C_1Q=2\sqrt{5}\text{cm}$，所以

$$S_{\triangle AQC_1}=\frac{1}{2}A_1C_1\cdot\sqrt{A_1Q^2-(\frac{A_1C_1}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{5}^2)-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=4\sqrt{6}(\text{cm}^2).$$

因
$$V_{P-A_1QC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1QC_1}\cdot h=\frac{4\sqrt{6}}{3}h,$$

$$V_{P-A_1QC_1}=V_{A_1-PQC_1},$$

所以，有$\frac{4\sqrt{6}}{3}h=8$，得$h=\sqrt{6}(\text{cm})$，即为所求.

例5 已知棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，M，N分别是BB_1，B_1C_1的中点，P是线段MN的中点，求DP与AC_1的距离.

解 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$右侧补一个同样大小的正方体$DCEF-D_1C_1E_1F_1$. 如图17-5，于是由$AC_1 /\!/ DE_1$，知$AC_1 /\!/$平面DPE_1，AC_1与平面DPE_1距离即DP与AC_1间距离，也就是点C_1到平面DPE_1距离.

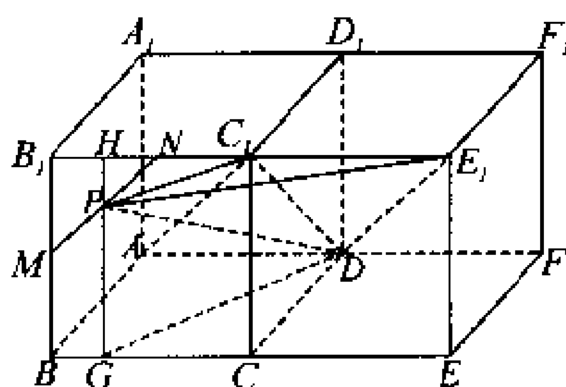


图 17－5

设点C_1到平面DPE_1距离为h，作$PH\perp B_1C_1$，H为垂足，则$PH=\frac{1}{2}B_1M=\frac{1}{4}$，延长$HP$交$BC$于$G$，则$PG=\frac{3}{4}$，$CG=\frac{3}{4}$，且

$$PD=\sqrt{PG^2+DG^2}=\sqrt{PG^2+GC^2+CD^2}=\frac{\sqrt{34}}{4},$$

$$PE_1=\sqrt{PH^2+E_1H^2}=\frac{5\sqrt{2}}{4},$$

又$DE_1=\sqrt{3}$，故不难求得

$$S_{\triangle DPE_1}=\frac{\sqrt{86}}{8},\qquad S_{\triangle PC_1E_1}=\frac{1}{8},\qquad ①$$

注意到

$$V_{D-PC_1E_1}=V_{C_1-DE_1P},$$

即

$$\frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle DE_1P}=\frac{1}{3}\cdot DC\cdot S_{\triangle PC_1E_1},\qquad ②$$

将①代入②且利用 $DC=1$ 可得 $h=\frac{\sqrt{86}}{86}$,即为所求.

例 6 长为$\sqrt{2}$,宽为 1 的矩形,以它的一条对角线所在的直线为轴旋转一周,求得到的旋转体的体积.

解 如图 17-6,D' 点是点 D 关于 AC 的对称点,CD' 交 AB 于 H,作 $BE\perp AC$ 于 E,$HF\perp AC$ 于 F.

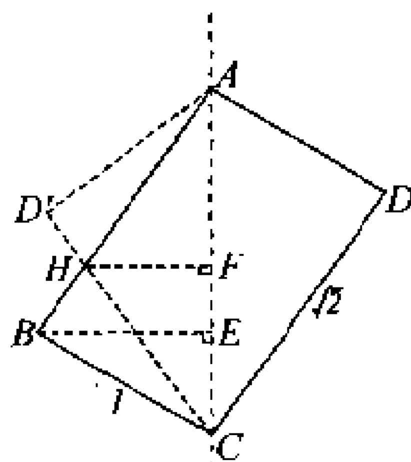


图 17-6

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3},$$

$$BE=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$HF=\frac{BC\times AF}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

设$\triangle ABC$,$\triangle ADC$,$\triangle AHC$ 绕直线 AC 旋转所成旋转体的体积分别为 V_1, V_2, V_3,则有

$$V_1=V_2=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot BE^2=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi,$$

$$V_3=\frac{1}{3}\pi\cdot AC\cdot HF^2=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi,$$

于是

$$V=V_1+V_2-V_3=2\times\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi=\frac{23\sqrt{3}}{72}\pi.$$

即为所求.

例 7 设正三棱锥 $P-ABC$ 的高为 PO,M 为 PO 的中点,过 AM

作与棱 BC 平行的平面，将三棱锥截为上、下两部分，试求此两部分体积之比.

解 如图 17-7，设过 AM 平行于 BC 的平面与 PB，PC 分别交于 E，F，则 $EF /\!/ BC$. 设 D 为 BC 的中点，连结 PD 交 EF 于 G，则 $\frac{EF}{BC}=\frac{PG}{PD}$，因 A 到平面 PBC 的距离即为 A 到平面 PEF 的距离，所以

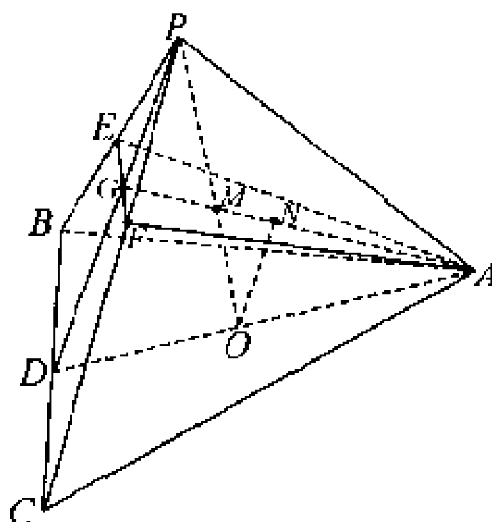


图 17－7

$$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=\left(\frac{EF}{BC}\right)^2=\left(\frac{PG}{PD}\right)^2. \quad ①$$

在 $\triangle PDA$ 中，过 O 点作 PD 的平行线交 AG 于 N，则

$$\frac{PG}{GD}=\frac{ON}{GD}=\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3},$$

有

$$\frac{PG}{PD}=\frac{2}{5}.$$

由①，②得

$$\frac{V_{P-AEF}}{V_{P-ABC}}=\frac{4}{25}.$$

故所求的上下两部分体积之比是 $\frac{4}{21}$.

例 8 在六条棱长分别为 2，3，3，4，5，5 的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论.

分析 首先根据三角形两边之差小于第三边这一性质，依题设条件，一边是 2 的三角形，其余两边只可能是

①3，3；　　②5，5；

③4，5；　　④3，4.

从而，题设四面体中，以 2 为公共边的两个侧面三角形的其余两边只可能有下列三种情形：

①与②；　①与③；　②与④.

再分别讨论上述三种情形：

（ⅰ）如图 17-8，$AC = BC = 3$，$AD = BD = 5$. 显见 $AC \perp CD$，$BC \perp CD$，即 $CD \perp$ 平面 ABC.

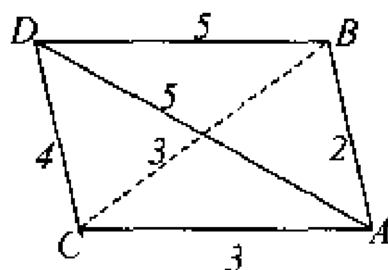


图 17－8

由对称性，这样的四面体只有一个，其体积为

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot CD$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3^2 - 1} \times 4 = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

（ⅱ）这样的四面体有两个. 如图 17-9，显见它们的体积相等，记为 V_2. 因 $2^2 + 4^2 < 5^2$ 故 $\angle BAD$ 或 $\angle ABD$ 为钝角，BD 与平面 ABC 斜交. 设 D 在底面 ABC 的高为 h_2，则 $h_2 < BD = 4$，从而

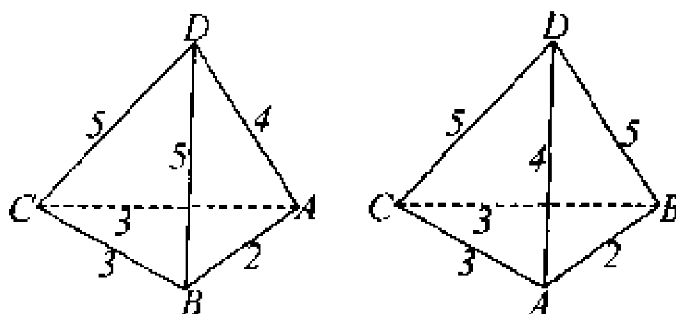


图 17－9

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h_2 < \frac{4}{3} \cdot S_{\triangle ABC} = V_1.$$

（ⅲ）这样的四面体也有两个. 如图 17-10，它们的体积也相等，记为 V_3.

因 $2^2 + 5^2 > 5^2$，故 $\angle ABC$ 为锐角，即 AB 与平面 BCD 斜交. 设 B 至底面 ACD 的高为 h_3，则 $h_3 < AB = 2$，从而

$$V_3 = \frac{1}{3} \cdot h_3 \cdot S_{\triangle ACD} < \frac{2}{3} \cdot S_{\triangle ACD}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot5\cdot\sqrt{3^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{5\sqrt{11}}{6}.$$

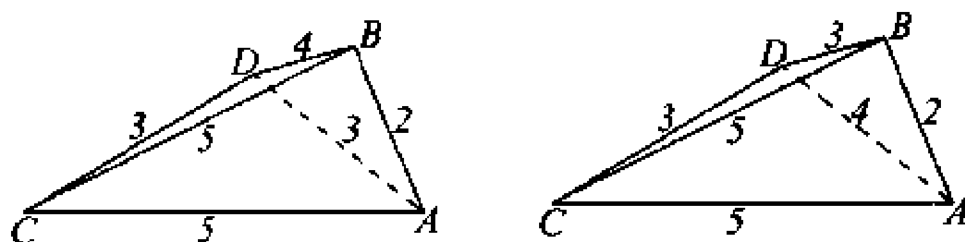


图 17－10

综上所述,所求最大体积为$\frac{8\sqrt{2}}{3}$.

例 9 设凸多面体 P_1 有九个顶点 $A_1,A_2,\cdots,A_9$, P_i 是将 P_1 通过平移 $A_1\to A_i$ 得到的多面体($i=2,3,\cdots,9$).试证:$P_1,P_2,\cdots,P_9$ 中至少有两个多面体存在有一个公共内点.

证明 以 A_1 为位似中心,将 P_1 作位似变换,相似比为 2:1,得到多面体 P'.显然 $P_1\subset P'$.

下面证明 $P_i\subset P'$($i=2,3,\cdots,9$).

设 Z 是 P_i 上任一点.Y 为平移前 X 对应的点,Z 为 XA_1, YA_i 的交点.

显然,Y 在 P_1 内,并且由于 P_1 是凸的,A_iY 也在 P_1 内,故 $Z\in P_1$.由于 A_1 是位似中心,$A_1Z=ZX$,故 $X\in P'$.因此,得 $P_i\subset P'$.

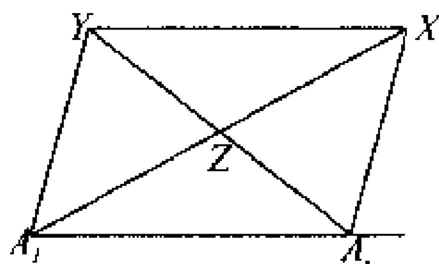


图 17－11

设 P_i 的体积为 V_i($i=1,2,\cdots9$),P' 的体积 V',则

$$V_1+V_2+\cdots+V_9=9V_1,$$

$V'=8V_1$.根据抽屉原则,$P_1,P_2,\cdots,P_9$ 中至少有两个多面体彼此相交,从而最少有一个公共内点.

练 习 十 七

一、选择题

1. 已知正方体，等边圆柱，球的表面积都是 S，体积依次是 V_1，V_2，V_3，则 ( ).

(A) $V_1 < V_2 < V_3$ (B) $V_3 < V_2 < V_1$

(C) $V_3 < V_1 < V_2$ (D) $V_2 < V_1 < V_3$

2. 正方体内接于表面积为 2π 的球，则正方体的内切球的体积是 ( ).

(A) $\frac{\sqrt{2}}{24}\pi$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{27}\pi$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{27}\pi$

3. 若四面体的一条棱长是 x，其余棱长都是 1，体积是 $F(x)$，则函数 $F(x)$ 在其定义域上 ( ).

(A)是增函数但无最大值

(B)是增函数且有最大值

(C)不是增函数且无最大值

(D)不是增函数但有最大值

4. 半球形的碗内盛满了水，若将碗口平面倾斜 30°，则碗内溢出的水的体积是原来容积的 ( ).

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{11}{12}$ (C) $\frac{5}{16}$ (D) $\frac{11}{16}$

5. 圆台上、下底面圆半径分别为 r_1，r_2，作平行于圆台底面的截面，截面分圆台为体积相等的两部分，则截面圆半径为( ).

(A) $\frac{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}{4}$ (B) $\sqrt[3]{\frac{r_1^3+r_2^3}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2}{2}}$ (D) $\sqrt[3]{\frac{r_1+r_2}{2}}$

二、填空题

6. 在三棱锥 $S-ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 两两垂直，$SA=SB=4$，$SC=6$，在三棱锥的内部有一个与三棱锥的四个面都相切的球，此球的半径 R 等于______.

7. 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 1，高为$\sqrt{2}$，异面直线 AB_1 与 BC_1 间距离是______.

8. 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为 a 的正三角形，则两个多面体的内切球的半径之比是______.

9. 正四棱台的上、下底面的边长分别为正整数 a 和 $b(a<b)$，其高为3，侧面积等于上、下二底面面积之和，则这个正四棱台的体积为______.

10. 在四面体 $ABCD$ 内部有一点 O，使得直线 AO、BO、CO、DO 与四面体的面BCD、ACD、ABD、ABC 分别交于A_1、B_1、C_1、D_1 四点，且 $\frac{AO}{A_1O}=\frac{BO}{B_1O}=\frac{CO}{C_1O}=\frac{DO}{D_1O}=k$，则 k 等于______.

三、解答题

11. 已知四面体四个面都是边长为 $10,17,\sqrt{261}$ 的三角形，求以它六条棱中点为顶点的八面体的体积.

12. 长方体 P 的对角线到三条与它不相交的棱之间的最短距离分别为 $2\sqrt{5},\frac{30}{\sqrt{13}},\frac{15}{\sqrt{10}}$. 求 P 的体积.

13. 四面体 $ABCD$ 的体积等于 5，过 AD、BC 的中点 M 及 N 作一截面，交 CD 于 P，AB 于 Q，若 $CP:PD=3:2$，点 A 到截面距离为 1，求截面的面积.

14. 如果两个四面体的四个面的面积对应相等，它们的体积是否一定相等？

15. 设圆锥的高为 H，轴截面三角形中以圆锥顶点为顶点的角为 2α，以圆锥高为直径作一球与圆锥底面相切，与圆锥侧面相截，试求球在圆锥外部部分的体积.

16. 一个正四棱锥 $S-ABCD$,延长其底面一边 CD,截取线段 $DE=2CD$,经过 B、E 和棱 SC 的中点 F 作一个平面,求此平面截四棱锥所成两部分的体积之比.

第十八讲　正四面体

知识点和方法述要

棱长都相等的四面体称为正四面体.

正四面体内切球和外接球的球心,也是四面体高的交点,称其为正四面体中心.

例题精讲

例1　能否在棱长为1的正方体形状的盒子里放入三个彼此至多有一公共点的棱长为1的正四面体?

解　可以. 设 M、N 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱 BB_1 和 DD_1 的中点. 如图18-1. 由于直线 AA_1 和 MN 之间的距离等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 这刚好与棱长为1的四面体的相对棱之间的距离相等. 于是可在 MN 上找到两个点 K 和 L,它们关于 MN 的中点 O 对称,并使得 AA_1KL 为正四面体. 分别用棱 B_1C_1 和 DC 取代 AA_1,并作相应的讨论,又可得到两个正四面体,棱长均为1,这三个四面体仅有惟一公共点 O.

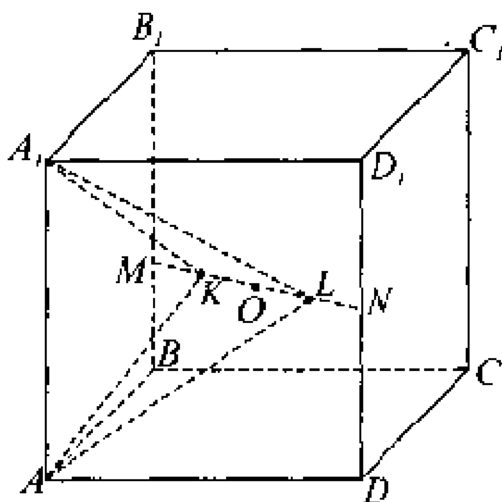


图 18－1

例2　设正四面体棱长为1,求互为异面的表面三角形的中线所在直线间的距离.

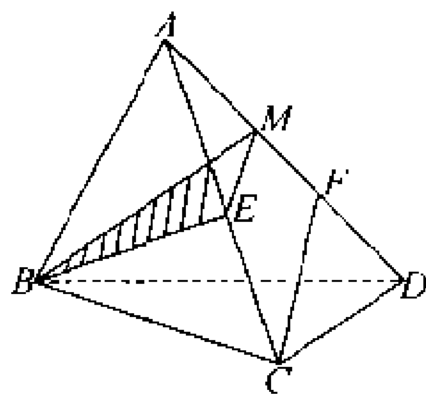


图 18－2

解 （ⅰ）如图，E、F 分别为 AC，AD 中点，取 AF 中点 M，连接 BM，则 BE、CF 之间的距离，即 A 到面 BEM 的距离 d（如图 18-2）.

$$\cos\angle BEM=\frac{BE^2+EM^2-BM^2}{2BE\cdot EM}$$

$$=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2+[1+(\frac{1}{4})^2-2\cdot1\cdot\frac{1}{4}\cdot\cos60^\circ]}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{6},$$

$$\sin\angle BEM=\sqrt{1-(\frac{1}{6})^2}=\frac{\sqrt{35}}{6},$$

$$S_{\triangle BEM}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{32},$$

所以 $$V_{A-BEM}=\frac{1}{3}\cdot d\cdot S_{\triangle BEM}=\frac{\sqrt{35}}{96}d.$$

另一方面

$$V_{A-BEM}=V_{B-AEM}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\sin60^\circ)\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{96}.$$

所以$\frac{\sqrt{35}}{96}d=\frac{\sqrt{2}}{96}$，解得 $d=\frac{\sqrt{70}}{35}$.

（ⅱ）连 DE，取 DE 中点 M，则 AE、CF 的距离，即 D 到面 CMF 的距离 d，如图 18-3.

$$\cos\angle CFM=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2-[(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{4})^2]}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{2}{3},$$

$$\sin\angle CFM=\sqrt{1-(\frac{2}{3})^2}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$S_{\triangle CMF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{\sqrt{5}}{16},$$

$$V_{D-CMF}=\frac{1}{3}\cdot d\cdot\frac{\sqrt{5}}{16}=\frac{\sqrt{5}}{48}d.$$

另一方面，

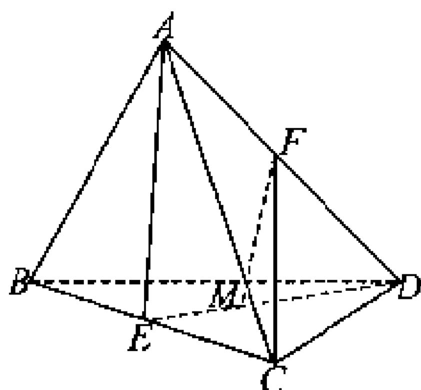


图 18-3

$$V_{D-CMF}=V_{F-CMD}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 30^\circ\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{96}.$$

F 与面 CMD 的距离等于 A 到面 CMD 的距离之半，即$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. 所以$\frac{\sqrt{2}}{96}=\frac{\sqrt{5}}{48}d$，解得 $d=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

因此，所求距离为$\frac{\sqrt{70}}{35}$或$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

例 3 P、Q 是正四面体$A-BCD$ 内任意两点，求证：

$$\cos\angle PAQ>\frac{1}{2}.$$

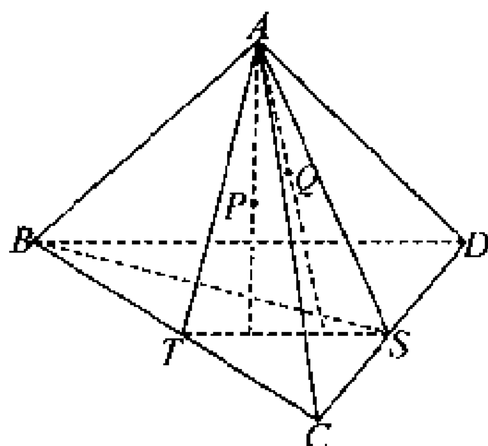


图 18-4

证明 当 A、P、Q 三点共线时，结论显然成立. 当 A、P、Q 三点不共线时，如图 18-4 所示，它们确定一个平面 α，平面 α 必与$\triangle BCD$ 的某两边相交，不妨设 α 与BC、CD 交于 T、S. 依题设，T、S 不在$\triangle BCD$ 的同一条边上，AT、AS 中至少有一条不是四面体的棱. 不妨设其为 AT. 连 BS，由对称性知 $AS=BS$.

在$\triangle BTS$ 中，$\angle BTS>\angle BCS=60^\circ$，$\angle SBC\leqslant\angle DBC=60^\circ$，故 $TS<BS=AS$，同理 $TS<AT$. 因此$\angle TAS<\angle AST$，$\angle TAS<\angle ATS$. 于是$\angle TAS<60^\circ$，即得 $\cos\angle PAQ>\frac{1}{2}$.

例 4 已知四面体的内切球切四面于其重心处，试证这个四面

体是正四面体.

证明 设 K_1、K_2 分别是 $\triangle VAB$ 和 $\triangle VBC$ 的重心(如图 18-5),则 K_1、K_2 也是内切球于平面 VAB 和平面 VBC 的切点.设 AB 的中点为 M_1,BC 的中点为 M_2,连 VM_1、VM_2、BK_1 和 BK_2.K_1、K_2 分别在 VM_1、VM_2 上,由球外一点向球引切线的切线长都相等,可得 $VK_1=VK_2$,$BK_1=BK_2$.因此 $\triangle VBK_1\cong\triangle VBK_2$,$\angle BVK_1=\angle BVK_2$.因

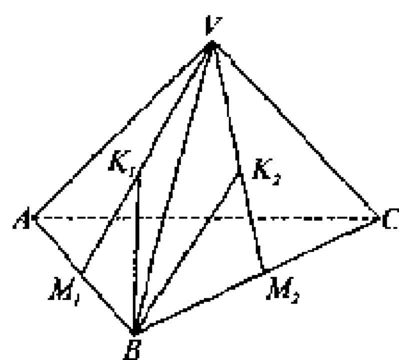


图 18-5

$$VM_1=\frac{3}{2}VK_1=\frac{3}{2}VK_2=VM_2,$$

所以$\triangle BVM_1\cong\triangle BVM_2$,$BM_1=BM_2$.从而有 $AB=BC$,同理 $AC=AB$.即$\triangle ABC$ 为等边三角形.同理可证各面都是等边三角形,因此 $V-ABC$ 是正四面体.

例 5 证明:正四面体的中心到各顶点的距离之和小于其他任意一点到各顶点距离之和.

分析 本题由平面几何中的如下命题推广而来:正三角形的中心到各顶点的距离之和小于三角形所在平面内其余任意一点到各顶点的距离之和.其证明如下:如图 18-6,分别经过 A,B,C 各点作对边的平行直线,得一个外接正$\triangle A_1B_1C_1$.设 O 为正$\triangle ABC$ 的中点,若 P 为$\triangle A_1B_1C_1$ 内部或边界上异于 O 的任意一点,则不难由面积法得到 P 点到$\triangle A_1B_1C_1$ 各边的距离之和

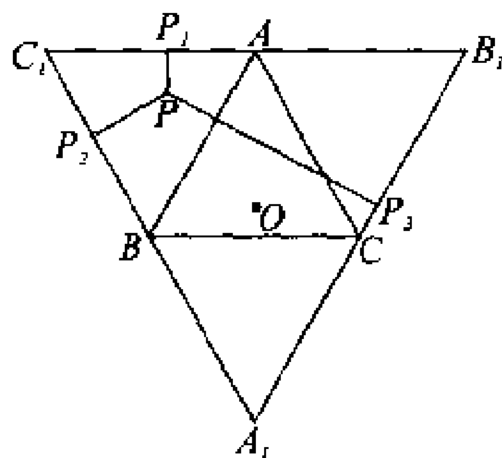


图 18-6

$$PP_1+PP_2+PP_3=OA+OB+OC.$$

但因 PA, PB, PC 不全垂直于$\triangle A_1B_1C_1$ 的各对应边，故

$$PA + PB + PC > PP_1 + PP_2 + PP_3,$$

有 $$PA + PB + PC > OA + OB + OC.$$

若 Q 为$\triangle A_1B_1C_1$ 外部任意一点，则十分明显：

$QA + QB + QC > OA + OB + OC.$

回到原命题上来，证明是类似的。如图 18-7，经过正四面体 $ABCD$ 的各顶点分别作相对面的平行平面，构成一个外接正四面体 $A_1B_1C_1D_1$，设 O 为正四面体 $ABCD$ 的中心。若 P 为正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 内部或边界上异于 O 的任意一点，记 P 点到正四面体 $A_1B_1C_1D_1$ 各面距离为 $PP_i(i = 1,2,3,4)$，则

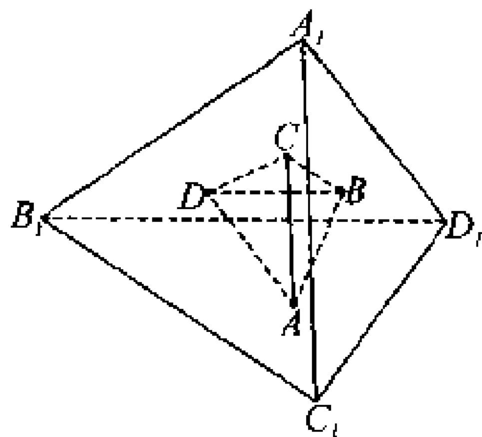


图 18-7

$$V_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot PP_1 + \frac{1}{3}S_{\triangle B_1C_1D_1}\cdot PP_2 + \frac{1}{3}S_{\triangle C_1D_1A_1}\cdot PP_3 + \frac{1}{3}S_{\triangle D_1A_1B_1}\cdot PP_4$$

$$= \frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot OD + \frac{1}{3}S_{\triangle B_1C_1D_1}\cdot OA + \frac{1}{3}S_{\triangle C_1D_1A_1}\cdot OB + \frac{1}{3}S_{\triangle D_1A_1B_1}\cdot OC,$$

即 $$PP_1 + PP_2 + PP_3 + PP_4 = OA + OB + OC + OD.$$

但因 PA, PB, PC, PD 不全垂直于正四面体$A_1B_1C_1D_1$ 的各对应面，故

$$PA + PB + PC + PD > PP_1 + PP_2 + PP_3 + PP_4,$$

即 $$PA + PB + PC + PD > OA + OB + OC + OD.$$

若 Q 为正四面体$A_1B_1C_1D_1$ 外部任意一点，则显然有

$$QA + QB + QC + QD > OA + OB + OC + OD.$$

例 6 以棱长为 1 的正四面体的各棱为直径作球。S 是所作六个球的交集，证明 S 中没有一对点的距离大于$\frac{1}{\sqrt{6}}$.

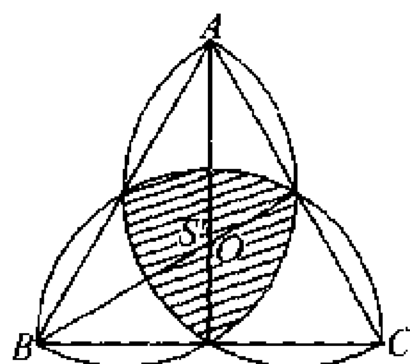


图 18－8

分析 对于棱长为1的正四面体，在以各棱为直径作球确定出六个球的交集的图形后再论证问题显然相当麻烦. 以退为进，运用类比的方法，先考察"边长为1的正三角形，以各边为直径作圆，S'是所作三个圆的交集".

如图18-8，易知S'包含于以正三角形重心为圆心，以$\frac{\sqrt{3}}{6}$为半径的圆内. 因此S'内任意两点的距离不大于$\frac{\sqrt{3}}{3}$. 再回到空间.

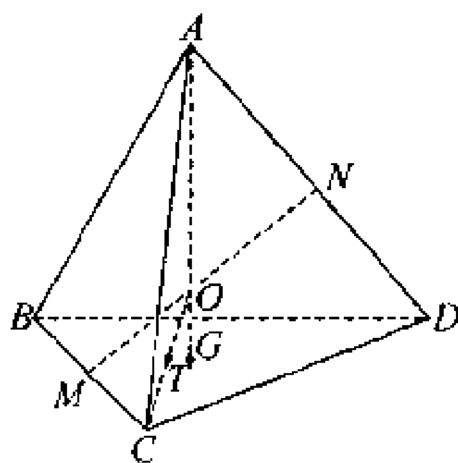


图 18－9

正四面体$ABCD$中，M、N分别为BC、AD的中点. G为正$\triangle BCD$的中心，$MN\cap AG=O$. 显然O是正四面体$ABCD$的中心. 易知$OG=\frac{1}{4}AG=\frac{1}{2\sqrt{6}}$，且可推得以$O$为球心，$OG$为半径的球内任意两点距离不大于$\frac{1}{\sqrt{6}}$，故只需证明球$O$必包含$S$. 事实上，根据四面体的对称性，不妨考察四面体$OMCG$. 设$P$为四面体$OMCG$内任意一点，且$P$不在球$O$内，可以证明$P$亦不在$S$内(如图18-9).

若球O交OC于T点，$\triangle TON$中，$ON=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$OT=\frac{1}{2\sqrt{6}}$，

$$\cos\angle TON=\cos(\pi-\angle TOM)=-\frac{OM}{OC}.$$

根据余弦定理

$$TN^2=ON^2+OT^2+2ON\cdot OT\cdot\frac{OM}{OC}$$

$$=(\frac{\sqrt{2}}{4})^2+(\frac{1}{2\sqrt{6}})^2+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{4}.$$

所以 $TN=\frac{1}{2}$. 在 Rt$\triangle AGD$ 中, N 是 AD 中点, 所以 $GN=\frac{1}{2}$, 由 $GN=TN=\frac{1}{2}$, $OG=OT$ 知 $\triangle GON\cong\triangle TON$, 所以 $\angle TON=\angle GON$ 且均是钝角.

于是, 在 $\triangle GOC$ 内, 不属于球 O 的任何点 P, 均有 $\angle PON>\angle TON$, 即有 $PN>TN=\frac{1}{2}$, P 点在 N 为球心, AD 为直径的球外, P 点不属于区域 S.

同样在四面体 $OMCG$ 内不属于球 O 的任意点 P, 亦有 $\angle PON>\angle TON$, 故有 $PN>\frac{1}{2}$, P 点也在 N 为球心, AD 为直径的球外, P 点不属于区域 S.

由此可见球 O 包含六个球的交集 S, 即 S 中不存在两点, 使其距离大于 $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

例 7 证明, 可在棱长为 1 的正四面体的表面上选取一个由若干线段组成的有限集, 其中所有线段的总长度小于 $1+\sqrt{3}$, 并使得四面体的任二顶点都可以用由这个集中的一些线段组成的折线来接连.

分析 宜展开, 如图 18-10. 由面 ABC、BCD 构成菱形 $ACDB$. 其中 $AB=1$, $\angle BAC=60°$. 我们知道三角形中, 费马点到各顶点的距离和是三角形内的点到各顶点距离和中最小的. 设 AD, BC 交于点 P, 注意到对称性, 先考察 $\triangle APB$, 设 Q 为 $\triangle ABP$ 的费马点, 即点 Q 使

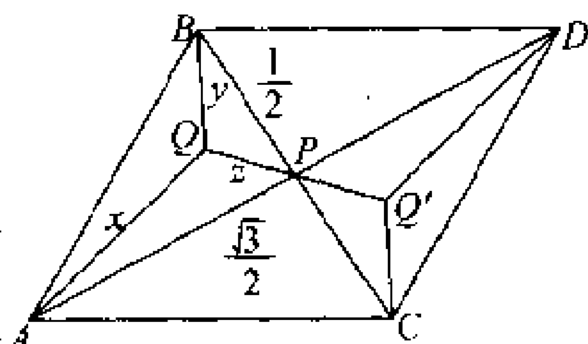


图 18-10

$$\angle AQP = \angle PQB = \angle BQA = 120°.$$

(这一点对于 Rt$\triangle APB$ 而言不难办到). 设 $AQ = x, BQ = y, PQ = z$, 则

$$x + y + z < AP + BP = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

设点 Q' 与点 Q 关于 P 点对称,那么线段 AQ、BQ、QP、PQ'、CQ'、DQ' 组成的集 M 所有线段总长度小于 $2\times(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})$ 即 $1+\sqrt{3}$. 集合 M 满足题设要求.

例 8 已知棱长为 3 的正四面体 $ABCD$, E、F 是棱 AB、AC 上的点,且 $AF = 2FC$, $BE = 2AE$, 求四面体 $AEFD$ 的外接球球心与内切球球心之间距离.

解 设四面体 $AEFD$ 内切球半径 r、球心 N、外接球半径 R、球心 M, 连接 NA、NE、NF、ND, 则

$$\begin{aligned} V_{AEFD} &= V_{N-AEF} + V_{N-AFD} + V_{N-ADE} + V_{N-EFD} \\ &= \frac{1}{3} r(S_{\triangle AEF} + S_{\triangle AFD} + S_{\triangle ADE} + S_{\triangle EFD}). \end{aligned}$$

因

$$S_{\triangle AEF} = \frac{2}{9} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle AFD} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\triangle AED} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

且由 $EF = \sqrt{3}$, $DF = DE = \sqrt{7}$, 可知 $S_{\triangle DEF} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$, 另一方面

$$V_{ADEF} = \frac{2}{9} V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

由上述各式可得 $r = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

如图 18-11, $\triangle AEF$ 是直角三角形,其外心是斜边 AF 的中点 G,

设$\triangle ABC$中心为O_1，连DO_1，过G作平面AEF的垂线，M必在此垂线上. 连结GO_1、MD. 在直角梯形GO_1DM中，$GO_1 = 1$，$DO_1 = \sqrt{6}$，$MD = R$，$MG = \sqrt{R^2 - 1}$. 于是

$$(DO_1 - MG)^2 + GO_1^2 = MD^2,$$

即　$$(\sqrt{6} - \sqrt{R^2 - 1})^2 + 1 = R^2,$$

解得$R = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

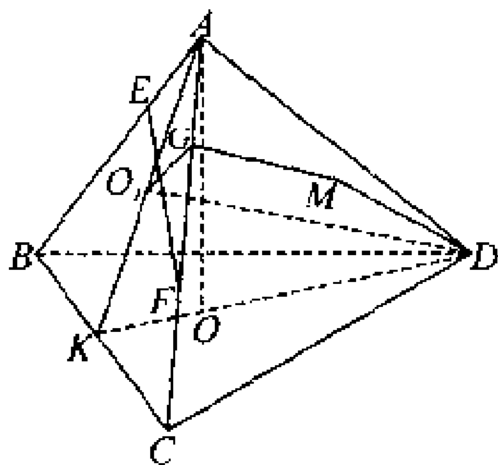


图 18 - 11

过正四面体的高AO及棱AD作截面ADK，K为BC中点，G'是内切球N与面ABC的切点，G'在AK上，因$NG' = r = \frac{\sqrt{6}}{8}$，且$\triangle ANG' \backsim \triangle AKO$，故

$$AG' = \frac{AO}{KO} \cdot G'N = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}AK.$$

这说明G点在截面AKD上射影恰为G'.

作GM在截面AKD上的射影$G'M'$，N点在$G'M'$上，GM与截面AKD的距离为$GG' = \frac{1}{3}CK = \frac{1}{2}$.

又　$$M'N = M'G' - NG' = \sqrt{R^2 - 1} - r = \frac{3\sqrt{6}}{8},$$

所以，有

$$MN = \sqrt{M'N^2 + G'G^2} = \frac{\sqrt{70}}{8}.$$

即为所求.

例 9　设$A_1A_2A_3A_4$是一个四面体，S_1、S_2、S_3、S_4分别是以A_1、A_2、A_3、A_4为球心的球，它们两两相外切. 如果存在一点Q，以这点为球心可作一个半径为r的球与S_1、S_2、S_3、S_4都相切，还可作一个半径为R的球与四面体的各棱都相切，求证这个四面体是正四面体.

分析 首先有以下事实：如果球心不在一条直线上的四个球 σ、σ_1、σ_2、σ_3 两两相切，那么或者它们两两相外切，或者它们之中的三个球面两两相外切并且都在第四个球面内与之相切，否则，存在其中某个球面，例如 σ，其内外有球面与之相切. 不妨设 σ_1 在内面 σ_2 和 σ_3 在外，那么 σ_1 与 σ_2 的切点及 σ_1 与 σ_3 的切点都重合于 σ_1 与 σ 的切点，因而四个球的球心在同一直线上，矛盾.

把以 Q 为中心，r 为半径的那个球记为 S；把以同一点为中心，R 为半径的球记为 T；并将球面 S_1、S_2、S_3、S_4 的半径分别记为 r_1、r_2、r_3、r_4. 由上面指出的事实易得知：或者 S_1、S_2、S_3、S_4 都与 S 相外切，或者它们都在 S 内与之相切.

考察平面 $A_1A_2A_3$ 与球面 S_1、S_2、S_3、T 相截得的图形（图 18-12）. T 与棱 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 相切的切点分别为 B_1、B_2、B_3，显然有 $A_1B_2 = A_1B_3$，$A_2B_3 = A_2B_1$，$A_3B_1 = A_3B_2$. 而球面 S_2 与 S_3，S_3 与 S_1，S_1 与 S_2 的切点 C_1，C_2，C_3 也有同样的性质：$A_1C_2 = A_1C_3$，$A_2C_3 = A_2C_1$，$A_3C_1 = A_3C_2$.

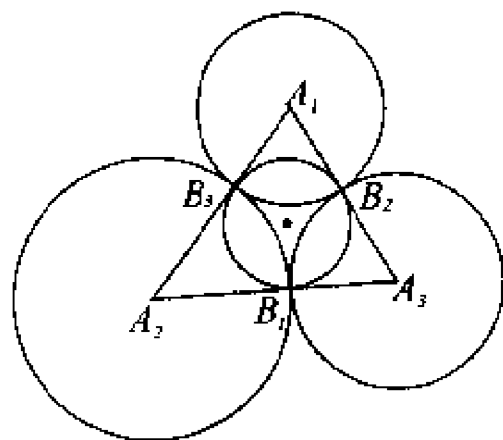


图 18－12

由此易知 C_i 与 B_i 重合（$i = 1,2,3$）.

以下分两种情形讨论：

（ⅰ）S_1、S_2、S_3、S_4 与 S 相外切. 参照以下命题：设 ABC 是一个三角形，以 A、B、C 为圆心，r_A、r_B、r_C 为半径作圆，它们两两相切. 如果存在一点 O，以它为圆心可作一个半径为 r 的圆与圆 A、圆 B、圆 C 都相切，并且以 O 为圆心还可以作一个半径为 R 的圆与 $\triangle ABC$ 的各边都相切，考察 $\triangle ABC$ 是否是等边三角形.

如图 18-13，D、E、F 分别为半径为 R，圆心为 O 的圆与 BC、CA、AB 的切点. 根据切线长定理，必有 $BD = BF$，$CD = CE$，$AE = AF$.

可见 D、E、F 又是圆 B 与圆 C，圆 C 与圆 A，圆 A 与圆 B 的切点，根据切割线定理，有 $OD^2=R^2=r(r+2r_a)$. 同理可得 $R^2=r(r+2r_b)$，$R^2=r(r+2r_c)$. 于是 $r_a=r_b=r_c$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形，这里 $R^2=r(r+2r_a)$ 是关键. 回到原命题.

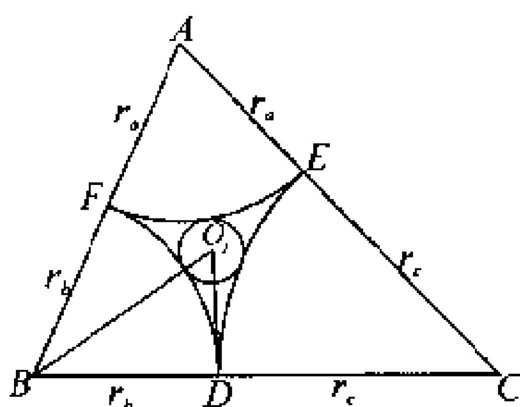


图 18-13

因为 $QB_1\perp A_2A_3$，$QB_2\perp A_3A_1$，$QB_3\perp A_1A_2$（如图 18-14），有

$$(r+r_i)^2=R^2+r_i^2,$$

解得 $r_i=\dfrac{R^2-r^2}{2r}(i=1,2,3)$. 因而 $A_1A_2=A_1A_3=A_2A_3=\dfrac{R^2-r^2}{r}$. 同理 $A_1A_4=A_2A_4=A_3A_4=\dfrac{R^2-r^2}{r}$. 故 $A_1A_2A_3A_4$ 是正四面体.

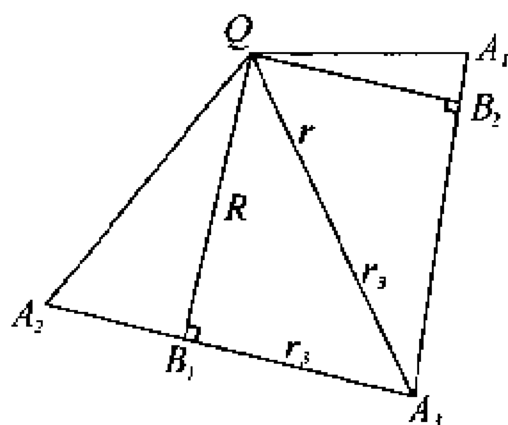


图 18-14

（ⅱ）S_1,S_2,S_3,S_4 在 S 内与 S 相切. 与（ⅰ）类似，可得

$$(r-r_i)^2=R^2+r_i^2,$$

$$r_i=\frac{r^2-R^2}{2r}(i=1,2,3,4).$$

因而 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个各边长都等于 $\dfrac{r^2-R^2}{r}$ 的正四面体.

练习十八

一、填空题

1. 设 P 为空间一点，PA、PB、PC、PD 是四条射线. 若 PA、PB、PC、PD 两两成角相等，则这些角的余弦值是________.

2. 设正四面体 $ABCD$ 棱长为 a，以正四面体各面中心 M、N、P、

Q 为顶点作四面体,则四面体 $MNPQ$ 的全面积为________.

3. 设点 O 位于正四面体 $ABCD$ 内部,G 为正四面体的中心,直线 OG 交正四面体的各面于 A_1,B_1,C_1,D_1,则 $\frac{A_1O}{A_1G}+\frac{B_1O}{B_1G}+\frac{C_1O}{C_1G}+\frac{D_1O}{D_1G}=$____.

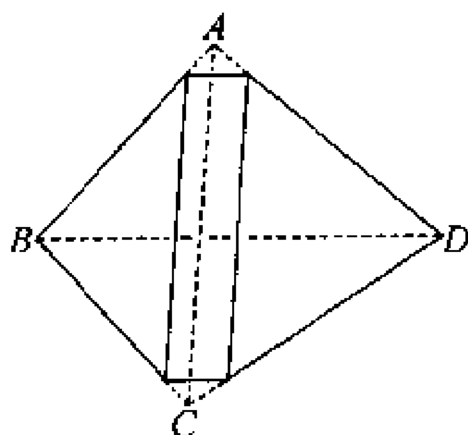
4. 四个半径为 2 的球两两相切(即每一个球均与其他三个球相切),其外切四面体的边长为________.

5. 已知正四面体 $ABCD$ 的棱长为 a,O 为内切球球心.如果球 O_1 与球 O 外切,并与正四面体的三个面都相切,则球 O_1 的半径 $r_1=$____.

二、解答题

6. 求证:正四面体的二面角与正八面体的二面角互补.

7. 将正四面体的棱分为 4 等分,在 $\frac{1}{4}$ 处截去各棱角得一多面体(如图,截去了一个棱角,另外五个棱角也要同法截去),求此多面体与原四面体体积之比.



(第 7 题)

8. (1) 证明:如果给定的四面体的六个二面角相等,那么,这个四面体一定是正四面体.

(2) 如果五个二面角相等,这个四面体一定是正四面体吗?

9. 在正四面体中,过每条棱的中点及其对棱作六个平面,试确定这些平面将四面体分成几个部分? 并且当四面体体积为 1 时,求每个部分的体积.

10. 一个体积为 1 的三棱锥 $T-ABC$,底面 ABC 是正三角形,中心 T',I 是 TT' 的中点,A'、B'、C' 是 A、B、C 关于点 I 的对称点.求三棱锥 $T-ABC$ 与三棱锥 $T'-A'B'C'$ 的公共部分体积.

11. 证明:对于正四面体的面上的每一点 M,存在一点 M',使得在面上至少有三条不同的连接 M 与 M' 的曲线,在面上所有连接 M 与 M' 的曲线中,有最短的长度.

第十九讲　组　合

知识点和方法述要

1. 组合研究的是无次序的选取问题. 一般地,从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素并成一组,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合,也就是从 n 个不同元素中不计顺序地选取 m 个构成原来集合的一个子集.

2. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示,

$$C_n^m=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\ (n-m)!},$$

并规定 $C_n^0=0!\ =1$.

3. 组合数有以下两个基本性质:

(1) $C_n^m=C_n^{n-m}$.

(2) $C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

此外,还有

(3) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$.

性质(1)可根据组合的定义予以证明:从 n 个不同元素中取出 m 个元素后,剩下 $n-m$ 个元素,也就是说,从 n 个不同元素中取出 m 个元素的每一个组合,都对应着从 n 个元素中取出 $n-m$ 个元素的惟一的一个组合;反过来也是一样. 因此,从 n 个元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m,等于从 n 个不同元素中取出 $n-m$ 个元素的组合数 C_n^{n-m},即 $C_n^m=C_n^{n-m}$.

性质(2)也可根据组合的定义予以证明:从 $a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$ 这 $n+1$ 个不同的元素中取出 m 个的组合数是 C_{n+1}^m,这些组合数可以分成两类,一类含 a_1,一类不含 a_1. 含有 a_1 的组合是从 $a_2,a_3,\cdots$

a_{n+1}这 n 个元素中取出 $m-1$ 个元素与 a_1 组成的,共有 C_n^{m-1};不含 a_1 的组合是从 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$这 n 个元素中取出 m 个元素组成的,共有 C_n^m 个,根据加法原理得 $C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m$.

性质(3)的两边都可看作 n 个元素组成的集合的所有子集的数目.

性质(1)说明,当 $m>\frac{n}{2}$时,通常不直接计算 C_n^m,而是改为计算 C_n^{n-m} 较为简便.

4.解有关组合的应用题,常可一题多解.要注意细审题意,有时因一字之差而与正确结果相去甚远.要明确谁是元素,从多少个元素中选取多少个元素.一般地,对特殊元素或有特殊要求的给予优先考虑.在不改变问题实质的前提下可将大数据变为小数据,便于对问题的思考和探索.

例 题 精 讲

例1 有甲、乙、丙三项任务,甲需2人承担,乙、丙各需1人承担,从10人中选派4人承担这三项任务,不同的选派方法共有多少种?

分析一 依次安排甲、乙、丙任务.首先从10人中选派2人承担任务甲,有 C_{10}^2种选派方法;其次,从剩下的8人中选1人承担任务乙,有 C_8^1 种选派方法;最后,再从剩下的7人选派1人承担任务丙,有 C_7^1 种选派方法.根据乘法原理知,共有选派方法

$$C_{10}^2C_8^1C_7^1=2520(\text{种}).$$

分析二 从10人中选派4人去承担该3项任务,有 C_{10}^4种选派方法,进而对选出的四人具体安排任务,分派方法的种数为 $C_4^2C_2^1C_1^1$,根据乘法原理知,共有不同选派方法

$$C_{10}^4C_4^2C_2^1C_1^1=2520(\text{种}).$$

例 2 有 5 双 10 只尺码不同的手套(左右手有区别),从这 10 只手套中取出 4 只.

(1) 恰有 2 双的取法有多少种?

(2) 恰有 2 只成一双的取法有多少种?

分析 (1)从 5 只手套中取 2 双,这 2 双手套间彼此不计较顺序,故有 $C_5^2=10$ 种不同取法.

(2)先从 5 双手套中取一双有 C_5^1 种取法,又再从剩下的 4 双即 8 只手套中取 2 只,要求不属同一双可分两步:从 8 只中先随意取一只,再除去与取出一只同属一双的另一只,从其余 6 只中取一只,以上两步有 $C_8^1C_6^1$ 种取法.然而这里面包含有重复.为说明问题,不妨举一简单例子.设有两双手套 A_1B_1 与 A_2B_2,从中先取出 A_1 再从另一双中取出 A_2 与先取出 A_2 再从另一双中取 A_1 就是一回事.因此,从 4 双手套中取不属于同一双的两只的不同取法实际上应是 $\frac{C_8^1\cdot C_6^1}{2}$ 种.根据乘法原理,符合要求的不同取法有

$$C_5^1\cdot\frac{C_8^1\cdot C_6^1}{2}=120(\text{种}).$$

例 3 (1) 四面体的一个顶点为 A,从其他顶点和各棱的中点取 3 个点,使它们和点 A 在同一个平面上,有多少种不同的取法?

(2) 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点,在其中取 4 个不共面的点,有多少种不同的取法?

分析 (1)如图 19-1,含顶点 A 的四面体的三个面上,除点 A 外都有 5 个点,从中取出 3 个点必与点 A 共面,共有 $3C_5^3$ 种取法.

含顶点 A 的三条棱上各有 3 个点,它们与所对棱的中点共面,共有 3 种取法.

根据加法原理,与顶点 A 共面三点的取法有

$$3C_5^3+3=33(\text{种}).$$

(2) 如图 19-1,从 10 个顶点中取 4 个点的取法有 C_{10}^4 种.从四面体同一个面上的 6 点中取出的四点必定共面,有 $4C_6^4=60$ 种;四面体

的每一条棱上三点与对棱中点共面，共有 6 种共面情形；从 6 条棱的中点取出 4 点时有 3 种共面情形（对棱中点连线两两相交且互相平分）故 4 点不共面的取法为

$$C_{10}^4-(60+6+3)=141 \text{ 种}.$$

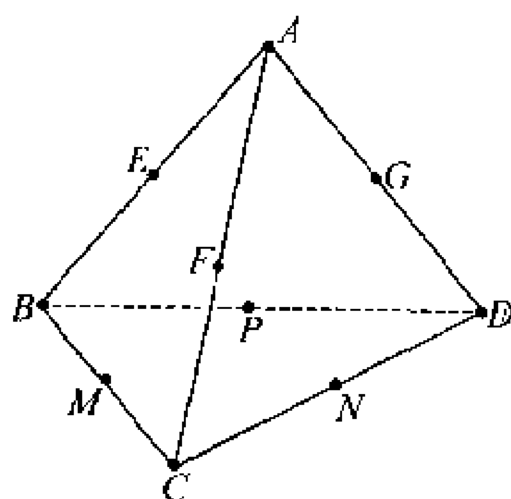


图 19－1

例 4 平面上有相异的 11 个点，每两点连成一条直线，共 48 条两两不重合也不平行的直线，这 11 个点可构成的不同的三角形的个数是多少？

分析 由于 $C_{11}^2=55>48$. 所以共线三点存在. 设有 k 组共线的点，每组点数不小于 3. 依次设为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$. 则

$$(C_{n_1}^2-1)+(C_{n_2}^2-1)+\cdots(C_{n_k}^2-1)=C_{11}^2-48=7.$$

而 $C_{n_i}^2-1\geqslant C_3^2-1=2(i=1,2,\cdots,k)$，所以有 $k\leqslant 3$.

当 $k=1,3$ 时，易知无整数解.

当 $k=2$ 时，解得 $n_1=4,n_2=3$ 或 $n_1=3,n_2=4$. 所以可构成的三角形的个数为

$$C_{11}^3-C_{n_1}^3-C_{n_2}^3=165-4-1=160.$$

例 5 在平面上给定 5 个点. 已知连接这些点的直线互不平行，互不垂直，也不重合. 通过每一点向其余 4 点的各条连线作垂线. 这些垂线的交点最多有多少个（不包括原来 5 个点）.

分析 还是用淘汰法较适宜. 由给定的 5 个点可两两连成 $C_5^2=10$ 条直线，其中每 4 个点可两两连成 $C_4^2=6$ 条直线，因此，由每个点都应引出 6 条垂线，累计有 $5\times 6=30$ 条. 如果这些垂线都两两相交，那么将有 $C_{30}^2=435$ 个交点，事实是这些垂线分别向 10 条连线引出，每一条连线上都有 3 条垂线，这 3 条垂线彼此平行，并没有交点，这说明有 $10C_3^2=30$ 个点并不存在，同时由给定的 5 个点可构成 $C_5^3=10$ 个三角形，上述 30 条垂线又恰好是这 10 个三角形的全部高线，每

一个三角形中三条高交于同一点，从而有重复计算，须减去点 $10C_5^2-10=20$ 个. 最后，由于经过原来的点的垂线都有 6 条，还应减去点 $5C_6^2=75$ 个.

综上所述，这些垂线的交点最多有

$$435-(30+20+75)=310(\text{个})$$

例 6 只出现数码 0 和 1 的十进制 10 位正整数之中，能被 11 整除的共有多少个?

分析 一个十进制整数能被 11 整除，当且仅当其奇数位上数字之和与偶数位上数字之和的差是 11 的倍数. 现设十位整数 $n=\overline{1a_8a_7\cdots a_1a_0}$满足条件，则 $a_0,a_1,\cdots,a_8$ 均为 1 或 0. 令

$$a_0+a_2+a_4+a_5+a_8=p,$$

$$a_1+a_3+a_5+a_7+1=q,$$

应有 $11 \mid p-q$. 注意到 $|p-q|\leqslant 5$，故仅有 $p=q$. 这时有五种可能情形，即 $p=q=k(k=1,2,3,4,5)$.

对给定的 k,a_0,a_2,a_4,a_6,a_8 中有 k 个为 1，$5-k$ 个为 0，有 C_5^k 种不同排法，a_1,a_3,a_5,a_7 中有 $k-1$ 个 1，$5-k$ 个 0，又有 C_4^{k-1} 种不同排法，故此时有满足题设条件的正整数 $C_5^kC_4^{k-1}$ 个.

于是全部满足题设条件的正整数共有

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{5} C_5^k C_5^{k-1} \\
&= C_5^1C_4^0+C_5^2C_4^1+C_5^3C_4^2+C_5^4C_4^3+C_5^5C_4^4 \\
&= 5+10\times4+10\times6+5\times4+1\times1 \\
&= 126(\text{个}).
\end{aligned}$$

例 7 甲、乙两队各出 7 名队员按事先排好的顺序出场参加围棋擂台赛. 双方先由 1 号队员比赛；负者被淘汰，胜者再与负方 2 号队员比赛，…，直到有一方队员全被淘汰为止. 另一方获得胜利，形成一种比赛过程. 试求所有可能出现的比赛过程的种数.

分析一 从胜方的角度来考虑，少则 1 号队员上场即可“横扫”

对方全部队员，多则动用全部 7 名队员方能最终击败对方所有队员，因此若甲方胜乙方，全部比赛过程可分七类情形，反之乙方胜甲方也是如此.

设甲方胜，并用了 $k(k=1,2,\cdots 7)$名队员才淘汰掉乙方全部 7 名队员.由于双方队员上场顺序都是事先安排好了的，所以乙方的第 7 号队员一定是被甲方第 k 号队员所淘汰，而在此之前，乙方已被淘汰 6 名队员，甲方已被淘汰 $k-1$ 名队员，共比赛了 $6+k-1=k+5$ 个回合，其中 $k-1$ 个回合中淘汰的甲方队员，这说明此时所有可能情形有 C_{k+5}^{k-1}种.

取 $k=1,2,3,4,5,6,7$，根据加法原理，甲方胜的可能情形有

$$C_6^0+C_7^1+C_8^2+\cdots+C_{12}^6=1716(\text{种})$$

同样道理，乙方胜的可能情形也有 1716 种.

综上所述，所有可能出现的比赛过程的种数共 3432 种.



图 19-2

分析二 如果撇开具体队员，从整体角度去考虑，所谓甲方胜，就是至多进行的 13 场比赛中，甲方胜了 7 场，如图 19-2，用○表示预定至多进行 13 场比赛，其中●表示乙方败，图中就是甲胜的一种情形，因此，甲胜的情形有 C_{13}^7种，对称地，乙胜的情形也有 C_{13}^7种，因此有 $2C_{13}^7=3432$(种).

分析三 用△表示甲方队员，用○表示乙方队员. 14 名队员满足甲、乙各方队员顺序排定的任何一种排列代表一种比赛过程. 如图 19-3，



图 19-3

只要看最后一名队员为○即知乙方胜. 反之则知甲方胜. 另一方面，

在任何一种比赛过程结束后依顺序添上胜方剩余队员即得 14 名队员的一种排列. 因此,任何一种比赛过程相当于 14 个位置中选 7 个位置按顺序要求安排甲方队员,剩下 7 个位置按顺序要求安排乙方队员共有不同比赛过程

$$C_{14}^{7}=3432(\text{种}).$$

例 8 如图 19-4, 一只甲虫沿着网格线前进,它走的是最短路线.

(1) 甲虫从点 $O(0,0)$ 爬到点 $P(8,6)$ 可有多少条不同的爬行路线?

(2) 若我们与甲虫开个玩笑,在图中擦去从点 $A(3,3)$ 到点 $B(3,4)$ 这一段,也就是假设这一段"道路"被水冲垮,不能通行,试问此时甲虫从原点到点(8,6)的爬行路线又有多少条?

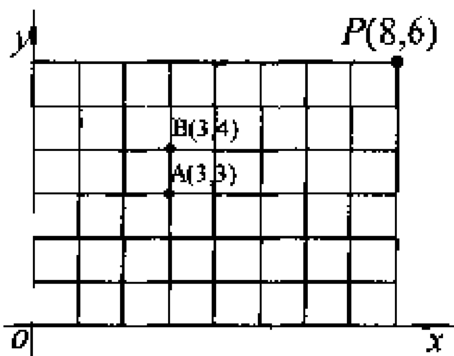


图 19-4

分析 (1) 甲虫从原点(0,0)到点 $P(8,6)$,必须向东爬行 8 个单位. 向北爬行 6 个单位,我们把向东爬行一个单位记为 E,向北爬行一个单位记为 N,如图 19-5 所示,这样任何一条爬行路线可以看作从 8+6 个位置中选取 6 个位置放置 N,其余位置放置 E,从而从点 $O(0,0)$ 到点 $P(8,6)$ 甲虫爬行的最短路线有 C_{14}^{6} 条.



图 19-5

(2) 由(1)知从原点 $O(0,0)$ 爬行到 $A(3,3)$ 的最短路线有 C_6^3,从 $A(3,3)$ 到 $B(3,4)$ 的最短路线是惟一的,又从点 $B(3,4)$ 到点 $P(8,6)$ 的最短路线有 C_7^2 条. 因此,由乘法原理知,从点 $O(0,0)$ 经 A, B 到 $P(8,6)$ 的最短路线有 $C_6^3C_7^2$ 条.

只须从点 $O(0,0)$ 到点 $P(8,6)$ 所有最短路线中淘汰掉上述从点

$O(0,0)$经 A、B 到 $P(8,6)$ 的最短路线即得到甲虫在 AB 这一段"道路"被水冲垮不能通行情况下自点 $O(0,0)$ 到点 $P(8,6)$ 的最短路线.所以此时甲虫爬行的最短路线有

$$C_{14}^{6}-C_{6}^{3}C_{7}^{2}=2583(条).$$

例 9 平面上有 10 个点,它们中无三点共线,两两连线,这些线段已经被染成红、蓝两色,每条线段染一色.已知 A 点引出的红色线段为奇数条,除 A 点外,其余各点所引出的红色线段数各不相等,求在此图中三边全红的三角形有多少个?两边红,一边蓝的三角形有多少个?

分析 首先考虑能否弄清楚红色线段的分布情形,除 A 点外的其余 9 点,每点所引出的红色线段少者可能是 0 条,至多是 9 条,但若有一点引出了 9 条红色线段,那么也就不存在另一点引出的红色线段 0 条,反之亦然,两者不相容.这说明其余 9 点引出的红色线段只能有两种情形:0,1,2,…,8 或 1,2,3,…,9.由于每条红色线段都被重复计算了两次,又由 A 点引出的红色线段是奇数条,故其余引出红色线段是奇数条的点只能有奇数个了.第一种情形不会发生,现将其余 9 点分别记作 $B_1,B_2,\cdots,B_9$,其中 B_i 表示引出 i 条红色线段的顶点.为了便于观察,如图 19-6 所示.可以看到 B_9 与所有其余 9 点有连线,B_1 不再和其他点相连,B_8 除 B_1 外与其他点均有连线,B_2 也除与 B_9,B_8 有连线外不再与其他点相连,B_7 与 B_1B_2 外其余 7 点有连线,B_3 除上述点外也不再与其余点相连,….从图 19-6 中还可以看出从 A 点引出了 5 条红线段.

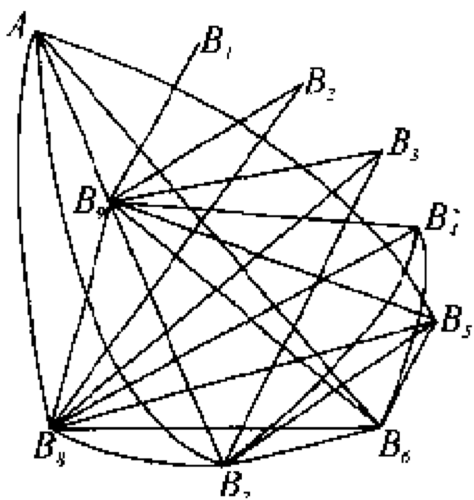


图 19-6

再考虑三边全红的三角形个数.如图 19-6 所示,以 B_2 为顶点的三边全红的三角形只有一个,以 B_3 为顶点的三

边全红的三角形有 C_3^2 个，以 B_4 为顶点的三边全红的三角形有 C_3^2 个，以 B_4 为顶点的三边全红的三角形有 C_4^2 个，而 A,B_5,B_6,B_7,B_8,B_9 彼此间所连均是红色线段，故三边全红的三角形有 C_6^3 个.

综上所述，三边全红的三角形总数是

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_6^3=1+3+6+20=30(\text{个}).$$

其次，对任何 $i\geqslant 2$，以 B_i 为顶点且与 B_i 相连的两边均为红边的三角形的个数为 C_i^2 个，以 A 为顶点且与 A 相连的两边皆为红边的三角形的个数为 C_5^2，将所有这些三角形的个数加起来，总共有三角形

$$C_2^2+C_3^2+C_4^2+C_5^2+C_6^2+C_7^2+C_8^2+C_9^2+C_5^2=130$$

个，其中每一个具有两红边一蓝边的三角形恰只被计算一次，但三边全红的三角形却都被计算了 3 次，因此两边红、一边蓝的三角形的个数为

$$130-3\times 30=40(\text{个}).$$

练 习 十 九

一、选择题

1. 把一圆周 24 等分，再由这些分点为顶点连成圆内接三角形，其中直角三角形的个数是 (　　).

(A)22　(B)132　(C)264　(D)2024

2. 在 100,101,…,999 这些数中，各位数字按严格递增或严格递减顺序排列的数的个数是 (　　).

(A)120　(B)168　(C)204　(D)216

3. $\angle A$ 的一边上有 4 个点，另一边上有 5 个点，连同$\angle A$ 的顶点 A 共 10 个点，过这 10 个点可作三角形的个数是 (　　).

(A) $C_5^1C_5^2+C_4^2C_5^1$　(B) $C_4^2C_5^1+C_4^1C_5^2$

(C) $C_5^1C_5^2+C_4^1C_5^2$　(D) $C_{10}^3-C_4^2-C_5^2$

二、填空题

4. 有一楼梯分 10 级，上楼时分 8 步完成，共有不同走法____种.

5. 凸五边形 $ABCDE$ 的边和对角线可组成不同三角形个数为____.

6. 有 m 条平行线，再作 n 条与这些直线相交的平行线，它们组成平行四边形的个数是____.

7. 从 8 名男医生，7 名女医生中选出 5 名医生组成一个医疗队，其中至少有 2 名男医生和 2 名女医生，共有不同选法____种.

8. 以长方体 8 个顶点中的任意 3 个为顶点的所有三角形中，锐角三角形的个数是____.

9. 平面上有五个蓝点和七个红点，其中有三个红点和两个蓝点在同一条直线上，其余再无三点共线，以不全同色的点为顶点的三角形有____个.

10. 用正五棱柱的 10 个顶点中的五个顶点可得到四棱锥____个.

11. 凸八边形的对角线中，如果任两条对角线不平行，除共顶点外，任三条对角线不共点，那么这些对角线(包括延长线)的交点个数是____.

12. 集合 A 和 B 分别有 8 个和 7 个元素，$A\cap B$ 有 4 个元，集合 C 有 3 个元素. 且满足下列条件：$C\subset A\cup B$，$C\cap A\neq\emptyset$，$C\cap B\neq\emptyset$，满足条件的集合 C 共有____个.

三、解答题

13. 十二个点 $A_1,A_2,\cdots,A_{12}$ 等分一个圆周，以这些点为顶点的等腰梯形共有多少个?

14. 一个口袋内有 4 个不同的红球，6 个不同的白球，

(1)从中任取 4 个球，红球的个数不比白球少的取法有多少种?

(2)若取一个红球记 2 分，取一个白球记 1 分，从中任取 5 个球，使总分不小于 7 的取法有多少种?

15. 从$\{1,2,\cdots,20\}$中选出 3 个数，使得没有两个数相邻，有多少

种不同的选法?

16. 设 n 为偶数,从 $\{1,2,\cdots n\}$ 中选出 4 个不同的数 a,b,c,d 满足

$$a + c = b + d,$$

证明共有 $\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}$ 种不同的选法(a,b,c,d 的顺序不必考虑).

第二十讲 排 列

知识点和方法述要

1. 一般地,从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有排列的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 P_n^m 表示.

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},$$

这里 $m,n\in\mathrm{N},m\leqslant n$,

3. n 个不同元素的圆周排列数为

$$\frac{P_n^n}{n}=(n-1)!.$$

从 n 个元素中任取 m 个元素的排列实质在于从 n 个不同元素中有次序地选取 m 个元素,并不在乎形式上是否排成一列. 换句话说,就是将选出的 m 个元素分别安放在 m 个不同位置上,安放的位置不同则代表不同的排列,排列之不同于组合,是排列计较顺序.

例题精讲

例 1 a、b、c、d、e、f 六个人排成一列纵队,a 不在 b 前有几种排列方法?

分析一 先选位置,再安排顺序,在 6 个位置上,选 4 个位置,让 c,d,e,f 四人排上,有 P_6^4 种排法,其余 2 个位置让 a,b 依 b 先 a 后的顺序排列即可,所以共有 $P_6^4=360$ 种排法.

分析二 先不加区分让六人在六个位置上作全排列，共有 P_6^6 种方法，再考虑淘汰不合要求的排列，在上述排列中的某两个位置上 a,b 作全排列，由此产生的 P_2^2 种排列只算一种，所以符合条件的排列共 $\frac{P_6^6}{P_2^2}=360$ 种.

分析三 利用对称性，在 P_6^6 种全排列中，b 在 a 前与 b 在 a 后两种机会是对等的，故两种排列出现的可能各占一半，所以知 $\frac{1}{2}P_6^6$ 种排法是 a 不在 b 前.

排列、组合问题都要注意防止重复、遗漏.

例 2 由数字 1,2,3,4,5,6 可以组成多少个没有重复数字的能被 3 整除的四位数?

分析 欲使一个数能被 3 整除，其充分必要条件是它的各位数字之和能被 3 整除，由于

$$1+2+3+4+5+6=21$$

为简便计，可从四位数中 4 个数位上数字外剩余的两个数字的和也为 3 的整数倍考虑. 这有 5 种情形：$1+2=3,1+5=6,2+4=6,3+6=9,4+5=9$. 对于每一种情况，组成四位数的 4 个数字可组成 P_4^4 个不同四位数，故共可组成

$$5\cdot P_4^4=120$$

个没有重复数字且可被 3 整除的四位数.

在运用乘法原理，多步骤地解决问题的过程中，区分排列、组合只能限于每个步骤，即在具体的每个步骤中考虑被选取的元素是否计较顺序.

例 3 某种产品有 4 只次品和 6 只正品(每只产品均可区分)，每次取一只测试，直到 4 只次品全测出为止. 求最后一只次品在第五次测试时被发现的不同情形有多少种?

分析 可分三步，首先优先考虑特殊位置——第五次测试有 C_4^1 种情形，其次是前 4 次被测试的 4 只产品的组合：剩下 3 只次品和一

只正品，有 $C_3^3C_6^1$ 种情形. 最后考虑前 4 次被测试的 4 只产品被测试情形与它们前后被测试的顺序有关，相当于把它们放置在 4 个不同位置上，有 P_4^4 种不同情形，根据乘法原理，第 4 只次品在第五次测试被发现的不同情形有

$$C_4^1C_3^3C_6^1P_4^4 = 4 \times 1 \times 6 \times 24 = 576(\text{种}).$$

优先考虑受限的元素或位置是常采用的思路，因为它们的问题解决了，剩下元素和位置的处理一般说来就方便多了.

例 4 10个节目中有 6 个演唱 4 个舞蹈，要求每两个舞蹈之间至少安排一个演唱，有多少种不同的安排节目演出顺序的方式?

分析 先将 6 个演唱节目排出先后次序，有 P_6^6 种不同方式，再将这六个演唱节目的 5 个间隙及前后一共 7 个可能位置中选出 4 个来安插舞蹈节目，这有 P_7^4 种插入方式，故共有

$$P_6^6P_7^4 = 604800$$

种不同的安排节目演出顺序的方式.

与通常优"限"的思路相反，例 4 中通过插入处理问题的思路则是首先安排一般元素，再将"受限"元素插入到允许位置上.

对于解决要求某些元素相邻排列的所谓"集团"排列问题，还有一种常用的方法——"视一"法. 顾名思义，就是先把要求相邻排列的元素看作一个整体，一个"大元素"，同其他元素一起排列，然后再考虑这个整体内部的各元素间的排列问题.

例 5 10 个同学排成一队行走，要求其中 4 个女同学相邻，且既不走在前面又不走在后面，问有多少种不同的排队方式?

分析 把 4 个女生看作一个整体，6 个男生列队有 P_6^6 种不同方式，再让女生这个整体插入到某两个男生之间，有 P_5^1 种插法，最后女生间列队又有 P_4^4 种不同方式，于是一共有

$$P_6^6 \cdot P_5^1 \cdot P_4^4 = 6! \times 5 \times 4! = 86400$$

种不同的列队方式.

有些问题直接计数困难，可通过从不同角度对同一对象进行计

数的方式寻得等量关系，间接求解.

例 6 有 8 个队比赛，采用下面淘汰制（如图 20-1），问在赛前抽签时，实际上可以得到多少种不同的安排表？

分析 第一轮的 4 个组，从左至右记为一、二、三、四，其中第一、二组为甲区，第三、四组为乙区，8 个队的抽签即是在图中 8 个位置的全排列，有 P_8^8 种排法. 但是上述的不同排法并不一定代表不同的安排，这是因为，8 队中的某 4 队都分在甲区与都分在乙区，实际上一样，甲区 4 队中的某 2 队都分在一组与都分在二组，实际上一样；乙区 4 队中的某 2 队都分在三组与都分在四组，实际上一样；至于同组的二队谁编奇数号谁编偶数号是没有区别的. 因此，在 8 队的全排列中，有 $2\cdot 2^2\cdot 2^4 = 2^7$ 种排列都是代表同一种比赛的安排方式.

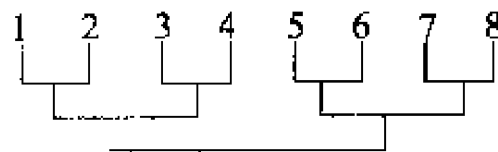


图 20-1

记比赛的不同安排方式数为 N，那么 N 满足下面关系 $2^7\cdot N = P_8^8$. 所以

$$N = \frac{P_8^8}{2^7} = \frac{8!}{2^7} = 315（种）.$$

例 7 5 对姐妹站成一圈，要求每对姐妹相邻，有多少种不同站法？

分析 首先可让 5 位姐姐站成一圈，这是圆周排列，有

$$\frac{P_5^5}{5} = P_4^4 = 24$$

种不同站法，然后再让 5 位妹妹插入其间，每位均可插入其姐姐的左侧，也可插入右侧，都有两种方式，所以一共有

$$24 \times 2^5 = 768$$

种不同站法.

n 个不同元素的一个圆周排列，可以看作是以其中某一元素 A 打头，其余元素按顺时针方向走成直线状的一个排列，反之亦然. 由

这可立得 n 个不同元素圆周排列数为 P_{n-1}^{n-1}.

例 8 8 个女孩和 25 个男孩围成一个圈，任意两个女孩之间至少站两个男孩，那么共有多少种不同的排列方法(只要把圈旋转一下就重合的排法认为是相同的)?

分析一 假定女孩中有一个是 A，对任何一个满足要求的圆周排列，令从 A 打头按顺时针方向走成一个直线状排列，如图 20-2 所示.

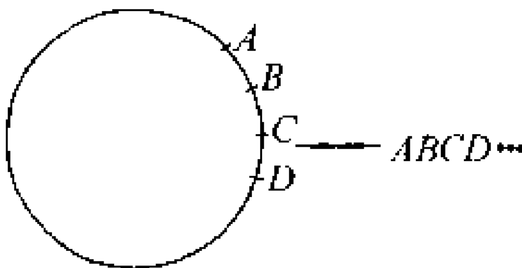


图 20-2

现以 O 代表女孩所站位置，以 X 代表男孩所站位置，由于任意两个女孩之间至少站两个男孩，故在每个 O 后至少应有两个 X，让每个 O 吸收后面紧跟着的 X，改画成$\oplus$，从而每个 OXX 排列唯一地对应一个$\oplus$…排列(如图 20-3 所示):

后一种排列的个数显然是从

$$(8+25)-2\times 8-1=16$$

个位置上选出 7 个位置放置$\oplus$的组合数，即 C_{16}^{7}.

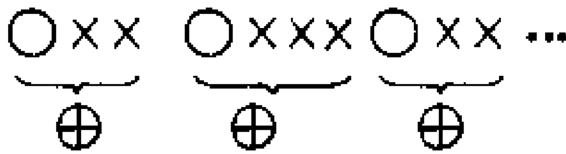


图 20-3

以上表明相对男、女间的位置排列共有 C_{16}^{7}种方法. 具体的对每种位置排列. 女孩间又有 P_7^7 种排列方法(A 已被固定在首位). 男孩间有 P_{25}^{25}种排列方法，故总的排列方法数为

$$C_{16}^{7}\cdot P_7^7\cdot P_{25}^{25}=\frac{16!25!}{9!}.$$

分析二 以 1 个女孩和 2 个男孩为一组，且使女孩恰好站在两个男孩中间，余下的 9 个男孩和这 8 个组被看成是 17 个元素，显然这 17 个元素的任意的圆排列被认为是满足题意的.

首先，从这 25 个男孩中选出 9 个男孩共有 C_{25}^{9}种可能. 其次，上述 17 个元素的圆排列数为 P_{16}^{16}种. 再次，分在 8 个组内的 16 个男孩在 16 个位置上的排列数是 P_{16}^{16}，所以总的排列方法数为

$$C_{25}^{9}\cdot P_{16}^{16}\cdot P_{16}^{16}=\frac{25!16!}{9!}.$$

例 9 圆桌的 9 个位置上放着 9 样不同的点心和饮料,6 位先生与 3 位女士共进早餐,3 位女士两两不相邻的坐法有多少种?

分析 问题跟通常所指圆周排列有区别,这是由于圆桌 9 个位置上放着的点心饮料不同. 设想围在桌边的 9 位先生和女士都顺时针方向移动一个位置,所面对的点心和饮料就不同了(当然转动一下桌面也行). 因此我们可以从圆桌的某个位置开始,将 9 个位置依次编号为第 1 号,第 2 号,…,第 9 号,也就是一般的直线状排列,即将 9 个人有次序地安排在 9 个不同位置上,但问题还要求女士不坐在一起,为此先让先生们从左至右排成一列,有 P_6^6 种站法,然后再让 3 个女士分别站在排头、排尾或插入两个先生之间,这有 P_7^3 种站法,不过排头排尾都是女士对号入座时会发生两女士相邻的情形. 这类情形应去掉. 由于两女士在两头有 P_3^2 种站法,另一女士插入两先生之间又有 P_5^1 种站法,所以先生站好后两女士站在排头、排尾,另一女生插入两先生间的站法有 $P_3^2P_5^1$ 种. 符合要求的坐法一共有

$$P_6^6(P_7^3-P_3^2P_5^1)=720\times(7\times6\times5-6\times5)=129600(\text{种}).$$

例 10 设集合 $I=\{1,2,3,\cdots n\}$. 若 I 中元素的全排列 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 满足 $t_i\neq i(i=1,2,\cdots,n)$,则称这样的排列 $t_1,t_2,\cdots t_n$ 为错位全排列. 用 D_n 表示 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 错位全排列的总数,试求 D_n.

分析 记 A_i 为满足条件 $t_i=i$ 的 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个元素全排列的总数,易知

$$|I|=P_n^n,$$

$$|A_i|=P_{n-1}^{n-1}\quad(i=1,2,\cdots n),$$

$$|A_i\cap A_j|=P_{n-2}^{n-2}\quad(1\leqslant i<j\leqslant n),$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=P_{n-3}^{n-3}\quad(1\leqslant i<j<k\leqslant n),$$

$$\cdots\cdots$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=1,$$

利用逐步淘汰原理,可得

$$\begin{aligned} D_n &= P_n^n - C_n^1 \cdot P_{n-1}^{n-1} + C_n^2 \cdot P_{n-2}^{n-2} - C_n^3 P_{n-3}^{n-3} + \cdots \\ &+ (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot P_1^1 + (-1)^n C_n^n \cdot P_0^0 \\ &= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right). \end{aligned}$$

练 习 二 十

一、选择题

1. 九把椅子排成一排,由6名学生和3位教授入座,3位教授先于6名学生到达,且决定他们的位置将挑选使得每位教授坐在两名学生之间,则教授挑选座位的不同方式数为　(　　).

(A)12　(B)36　(C)60　(D)84

2. 用数字1,2,3,4,5组成没有重复数字的五位数,其中小于50000的偶数的个数共有　(　　).

(A)60　(B)48　(C)36　(D)24

3. 要排一张有5个独唱节目和3个合唱节目的节目表,如果合唱节目不排头,并且合唱节目不相邻,则不同的排法种数有 (　　).

(A) $P_3^3 \cdot P_8^5$　(B) $P_5^5 \cdot P_4^3$

(C) $P_5^5 \cdot P_5^3$　(D) $P_5^5 \cdot P_6^3$

4. 有6个座位连成一横排,三人就座,恰有两个空位相邻的排法种数为　(　　).

(A)72　(B)96

(C)48　(D)以上都不对

二、填空题

5. 15个足球队进行联赛,结果对获得前三名的队分别授予金、银、铜杯,而末3名的队被降到低一级的联赛去,我们把两种比赛结果看作是相同的,如果获金、银、铜杯的队相同且被降级的队也相同,那么联赛可以有不同的结果____种.

6. 10个由父、母、孩子组成的家庭共30人，要从这30个人中任选5人排成一列参加接力比赛，若选出的5个人中没有任何两人属于同一家庭，则可以组成不同的接力队伍____种.

7. 四人跑4×400米接力，其中甲不跑第一棒，乙不跑最后一棒，共有不同组队方法____种.

8. 由数字0,1,2,3,4,5组成没有重复数字的六位数，其中个位数字小于十位数字的数共有____个.

9. 有8名儿童分成两排，每排4人.面对面地坐下，其中有两名儿童既不能面对面，又不能相邻，问共有不同坐法____种.

10. 将数字0与1,2与3,4与5分别写在三张卡片的正、反面，每面写一个数字，用这三张卡片可以依次排成首位数不得为零的三位数____个.

11. 满足条件$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=\{1,2,3,4,5\}$的所有五位数$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$之和为____.

三、解答题

12. (1) 分别从四所学校选拔6名报告员，每校至少1人，有多少种不同的选法？

(2) 将6名报告员分配到3所学校去做报告，每校2人，有多少种不同的分配方法？

(3) 将6名报告员分配到4所学校去做报告.每校至少1人，有多少种不同的分配方法？

13. 6个排成1排，(1)其中A、B、C必须相邻，且D不站在排头和排尾；(2)其中A、B都不能与C相邻，问各有多少种不同的排法？

14. 八个人站成一排，其中甲乙不排在一起，A、B、C也两两不能相邻，问有多少种不同的排法？

15. 将一个四棱锥的每个顶点染上一种颜色，并使同一条棱的两端点异色，如果只有5种颜色可供使用，那么不同的染色方法的总数是多少？

16. 给定了n^2个不同的实数，排成$n\times n$方阵，在每一列中取最

大的那个数,在每一行中取最小的那个数,求恰可取出 $2n$ 个不同的数的排列方式数.

17. 身穿1号到20号球衣的20名足球队员排成一横排照相,要求第1号队员肯定不站在首位,第20号队员肯定不站在末位,此外小于8号的队员必须站在8号队员之前,大于15号的队员必须站在15号队员之后,问有多少种排队方法?

第二十一讲　整　除

知识点和方法述要

1. 整除

(1) 设 a,b 是整数($b\neq0$),若存在整数 q,使 $a=bq$,则称 b 整除 a,或 a 能被 b 整除,记为 $b\mid a$. 这时 b 叫做 a 的因数或约数,a 叫做 b 的倍数. a 不能被 b 整除,记作 $b\nmid a$.

(2) 整除的基本性质

(ⅰ) 若 $b\mid a$,则 $b\mid(-a)$, $-b\mid a$, $(-b)\mid(-a)$, $|b|\mid|a|$.

(ⅱ) 若 $a\mid b$、$b\mid c$,则 $a\mid c$.

(ⅲ) 若 $a,b,c,m\in Z$,且 $a\mid b$, $a\mid c$,则 $a\mid(b\pm c)$, $a\mid mb$, $a\mid mc$, $a\mid m(b\pm c)$.

一般地,若 a、b_i, $x_i\in Z(i=1,2,\cdots n)$,且 $a\mid b_i$,则 $a\mid\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i$.

(ⅳ) 设 $a,b\in Z$,且 $a\mid b$,则对于任何 $m\in Z$,都有 $am\mid bm$;反之若 $am\mid bm$,则 $a\mid b$.

(ⅴ) 若 $|a|<|b|$,且 $|b|\mid|a|$,则 $a=0$.

(ⅵ) n 个连续整数的乘积一定能被 $n!$ 整除.

(ⅶ) 若 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式且 $d\mid b-c$,则 $d\mid f(b)-f(c)$.

(3) 一些数整除的判定方法.

设 x 是自然数,在十进制中的 $n+1$ 位数可表示为 $x=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$,即 $x=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0$,其中 $a_i(i=0,1,2,\cdots n)$为数码,它们都是整数,$0\leqslant a_i\leqslant9$ $(i=1,2,\cdots n)$,且 $a_n\neq0$.

(ⅰ) 若 $2\mid a_0$,则 $2\mid x$;

(ⅱ) 若 $3 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$,则 $3 \mid x$;

(ⅲ) 若 $4 \mid \overline{a_1 a_0}$,则 $4 \mid x$;

(ⅳ) 若 $5 \mid a_0$,则 $5 \mid x$;

(ⅴ) 若 $8 \mid \overline{a_2 a_1 a_0}$,则 $8 \mid x$;

(ⅵ) 若 $9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$,则 $9 \mid x$;

(ⅶ) 若 $11 \mid [(a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)]$,则 $11 \mid x$.

2. 带余除法

如果 a, b 是二个整数,$b \neq 0$,那么有且仅有一对整数 q, r,使得 $a = bq + r (0 \leqslant r < |b|)$ 成立.当且仅当 $r = 0$ 时,$b \mid a$;当 $r \neq 0$ 时,q 为 a 被 b 除的商,r 为 a 被 b 除的余数.

3. 最大公约数和最小公倍数.

(1)设 a_1, a_2 是两个整数,如果 $d \mid a_1$ 且 $d \mid a_2$,那么 d 就称为 a_1 和 a_2 的公约数.一般地,设 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 是 k 个整数,如果 $d \mid a_1, \cdots, d \mid a_k$,那么,$d$ 就称为是 $a_1, \cdots, a_k$ 的公约数.

设 a_1, a_2 是两个不全为零的整数,我们把 a_1 和 a_2 的公约数中的最大的为 a_1 和 a_2 的最大公约数,记作 (a_1, a_2).一般地,设 $a_1, \cdots a_k$ 是 k 个不全为零的整数,我们把 $a_1, \cdots, a_k$ 的公约数中的最大的称为 $a_1, a_2, \cdots a_k$ 的最大公约数,记作 $(a_1, \cdots, a_k)$.

(2)若 $(a_1, a_2) = 1$,则称 a_1 和 a_2 是既约的,也称 a_1 和 a_2 是互素的,一般地,若 $(a_1, \cdots a_k) = 1$ 则称为 $a_1, \cdots, a_k$ 是既约的,也称 $a_1, \cdots, a_k$ 是互素的.

(3) 设 a_1, a_2 是两个均不等于零的整数.如果 $a_1 \mid l$ 且 $a_2 \mid l$,则称 l 是 a_1 和 a_2 的公倍数,一般地,设 $a_1, \cdots, a_k$ 是 k 个均不等于零的整数,如果 $a_1 \mid l$ 且 $a_2 \mid l, \cdots, a_k \mid l$,则称 l 是 $a_1, \cdots, a_k$ 的公倍数.

设整数 a_1, a_2 均不为零,我们把 a_1 和 a_2 的正的公倍数中的最小的称为 a_1 和 a_2 的最小公倍数,记作 $[a_1, a_2]$,一般地,设整数 $a_1, \cdots, a_k$ 均不等于零,我们把 $a_1, \cdots, a_k$ 的正的公倍数中的最小的称为

$a_1, a_2 \cdots, a_k$ 的最小公倍数，记作$[a_1, a_2, \cdots, a_k]$.

4.（1）设正整数 $a, b(a>b)$满足 $a=bq+r(0\leqslant r<b)$，其中 q，r 均为整数，则$(a,b)=(b,r)$.

（2）当且仅当存在整数 x, y，使得 $ax+by=d$ 时，$(a,b)\mid d$.特别地，当且仅当存在整数 x, y，使得 $ax+by=1$ 时，$(a,b)=1$.

显然，相邻两正整数互素.

（3）若$(a,b)=1$，且 $a\mid bc$，则 $a\mid c$.

（4）$(a,b)[a,b]=ab$.

（5）当且仅当 $a_j\mid c(1\leqslant j\leqslant k)$时，$[a_1,\cdots,a_k]\mid c$.

（6）若 $k(>0)$是 a, b 的公倍数，则

$$\left(\frac{k}{a},\frac{k}{b}\right)=\frac{k}{[a,b]}.$$

例 题 精 讲

例 1 设 $a, b, c, d, u\in \mathbf{Z}$，且 $ac, bc+ad, bd$ 都能被 u 整除.证明 $u\mid bc, u\mid ad$.

证明 因

$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd,$$

故

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\,\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u}. \qquad ①$$

①式右端为整数，故$\frac{bc-ad}{u}$是整数，设 $s=\frac{bc+ad}{u}$，$t=\frac{bc-ad}{u}$，由①知 s, t 的平方差等于偶数.因此，数 s 与 t 或者同为偶数，或者同为奇数，有$\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2}$，$\frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2}$都是整数，即数 bc 和 ad 都被 u 整除.

例 2 求两个正整数 $x, y(x<y)$，其和为 667，它们的最小公倍数除以最大公因数所得商为 120.

解 依题意有

$$\begin{cases} x+y=667, \\ [x,y]=120(x,y). \end{cases}$$

令$(x,y)=d$,则 $x=x_1d_1$, $y=y_1d$, $(x,y)=1$. 于是$[x,y]=x_1y_1d$,所以

$$\begin{cases} (x_1+y_1)d=667, \\ x_1y_1d=120d. \end{cases}$$

由于$667=23\times29$, $120=2^3\times3\times5$,易知 $d\neq1$,因此 $d=23$ 或 29.

若 $d=23$,则 $x_1+y_1=29$, $x_1y_1=120$. 解得 $x_1=5$, $y_1=24$;

若 $d=29$,则 $x_1+y_1=23$, $x_1y_1=120$. 解得 $x_1=8$, $y_1=15$;

综上所述,解为 $x=115$, $y=552$ 或 $x=232$, $y=435$.

例 3 设 n 为自然数,求证:

$$A=3237^n-632^n-855^n+235^n$$

能被 1985 整除.

分析 因 $1985=397\times5$,且$(397,5)=1$,故只须证 $5\mid A$, $397\mid A$ 即可. 由 $3237-632=2605$,可知,$5\mid 3237^n-632^n$,又 $5\mid855^n$, $5\mid235^n$,故 $5\mid A$.

因 $3237-855=397\times6$, $632-235=397$,故 $397\mid3237^n-855^n$, $397\mid632^n-235^n$,而

$$A=(3237^n-855^n)-(632^n-235^n),$$

因此,$397\mid A$.

例 4 设 m,n 是正整数,证明:

$$(2^m-1,2^n-1)=2^{(m,n)}-1$$

证明 不妨设 $m\geqslant n$,由带余数除法得

$$m=qn+r_1(0\leqslant r_1<n),$$

于是

$$2^m-1=2^{qn+r_1}-2^{r_1}+2^{r_1}-1=2^{r_1}(2^{qn}-1)+2^{r_1}-1.$$

由此及 $2^n-1\mid2^{qn}-1$ 得

$$(2^m-1,2^n-1)=(2^n-1,2^{r_1}-1).$$

注意到$(m,n)=(n,r_1)$，若$r_1=0$，则$(m,n)=n$，结论成立，若$r_1\neq 0$，则继续对$(2^n-1,2^{r_1}-1)$作同样的讨论，由辗转相除法知结论成立.

注 显见，用任一大于1的自然数a代替2，结论仍然成立.

例5 设p,q是整数，$\frac{q}{p}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2000}$，求证：$q$能被3001整除.

证明

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{2000}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2000}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2000}\right)$$
$$=\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\cdots+\frac{1}{2000}$$
$$=3001\left(\frac{1}{1001\times 2000}+\frac{1}{1002\times 1999}+\cdots+\frac{1}{1550\times 1551}\right).$$

注意到上式括号中分母1001，1002，…，2000与3001都互素，从而把上式表示成分数后，分子q必是3001的倍数.

例6 证明：对任何自然数n和k，数

$$f(n,k)=2n^{3k}+4n^k+10$$

都不能分解成若干个连续的自然数之积.

分析 若一个数是n个连续整数之积，则这个数一定能被n及小于n的正整数整除. 由于结论是否定的，因此，首先尝试将目标收缩到很小范围的自然数，因为

$$f(n,k)$$
$$=3\cdot n^{3k}-n^{3k}+3n^k+n^k+3\times 3+1$$
$$=3(n^{3k}+n^k+3)-n^k(n^{2k}-1)+1$$
$$=3(n^{3k}+n^k+3)-n^k(n^k+1)(n^k-1)+1$$

又因$3\mid 3(n^{3k}+n^k+3)$，$3\mid n^k(n^k+1)(n^k-1)$，故$3\nmid f(n,k)$，故$f(n,k)$不能分解成3个或3个以上的连续自然数之积.

下面再让$f(n,k)$不能分解成两个连续自然数之积. 如前所述，$f(n,k)=3q+1$. 假设$f(n,k)$可以分解为两个连续自然数之积，令

$$f(n,k)=m(m+1).$$

显然，当 $m=3r$，或 $m=3r+2$ 时，$3|f(n,k)$，这与 $3\nmid f(n,k)$ 矛盾。当 $m=3r+1$ 时，$f(n,k)=3q+2$，这与 $f(n,k)=3q+1$ 的形式矛盾。因此，$f(n,k)$ 不能分解成两个连续自然数之积.

例 7 项链 A 由 14 颗珠子组成，项链 B 由 19 颗组成. 证明：对于每个正奇数 n，均可将 33 颗珠子标以 $n,n+1,\cdots,n+32$，使得上述每个整数恰好各用一次，并且相邻的珠子所标数互素.

证明 设项链 A 上的珠子依次标上数：$n+m,n+m+1,\cdots,n+m+13$，其中 $m\in\mathbf{N}$，且 $1\leqslant m\leqslant 18$. 由于连续二自然数互素，故只须满足

$$(n+m,n+m+13)=1,$$

即

$$(n+m,13)=1. \qquad ①$$

将项链 B 上珠子依次标上数：$n+m+14,\cdots,n+32,n,n+1,\cdots,n+m-1$，只须满足

$$(n+32,n)=1, \qquad ②$$

$$(m+m+14,n+m-1)=1. \qquad ③$$

③等价于

$$(n+m-1,15)=1. \qquad ④$$

注意到②等价于 $(n,32)=1$，而 n 为奇数，可见②恒成立. 为满足①、④只须 $n+m$ 不被 13 整除且被 3、5 除时余数不为 1. 在 m 可取的 18 个数中，至多只有 6 个被 3 除余 1，4 个被 5 除余 1，2 个被 13 整除. 因此，存在 m 满足题设要求.

注 区间 $1\leqslant m\leqslant 18$ 可缩短为 $1\leqslant m\leqslant 5$. 因此时在 m 可取的 5 个值中能使 $n+m$ 被 3 除余 1 的至多 2 个，被 5 除余 1 的至多 1 个，被 13 整除的至多 1 个，存在着满足题设要求的 m.

例 8 设 $S=\{1,2,3,4,\cdots,280\}$. 求最小自然数 n 使得 S 的每个有 n 个元素的子集都含有 5 个两两互素的数.

分析 考虑如下集合：$A_i=\{S$ 中一切可被 i 整除的自然数$\}$，其中 $i=2,3,5,7$. 记 $A=A_2\cup A_3\cup A_5\cup A_7$，利用容斥原理，容易算出 A 中元素的个数是 216. 由于 A 中任取 5 个数必有两个数在同一个 A_i 中，从而它们不互素，于是 $n\geqslant 217$.

下面证明任意含有 217 个元素的子集中均有 5 个数两两互素，为此考虑下列集合：

$B_1=\{1$ 和 S 中的一切素数$\}$

$B_2=\{2^2,3^2,5^2,7^2,11^2,13^2\}$

$B_3=\{2\times131,3\times89,5\times53,7\times37,11\times23,13\times19\}$

$B_4=\{2\times127,3\times83,5\times47,7\times31,11\times19,13\times17\}$

$B_5=\{2\times113,3\times79,5\times43,7\times29,11\times17\}$

$B_6=\{2\times109,7\times73,5\times41,7\times23,11\times13\}$

容易知道 B_1 中元素个数为 60. 令

$$B=B_1\cup B_2\cup B_3\cup B_4\cup B_5\cup B_6,$$

则 B 中元素的个数为 88，从而 S 中 B 以外的元素个数为 $280-88=192$ 个. 于是对 S 中的任意 217 个数，有 $217-192=25$，因而存在 $1\leqslant i\leqslant6$，使得这 217 个数包含 i 中的 5 个数，这 5 个数是两两互素的.

综上所述，满足条件的 n 是 217.

例 9 a,b 是非负整数，问是否存在整数 p,q 使对任意正整数 n，$p+na$ 与 $q+nb$ 互素？

解 回答是肯定的. 若 $a=0$ 或 $b=0$，只须令 $p=q=1$. 若 $ab\neq0$，记 a,b 是最小公倍数为 m，$r=\dfrac{m}{a}$，$s=\dfrac{m}{b}$，易知 $(r,s)=1$，于是存在整数 x,y 使

$$rx+sy=1, \qquad ①$$

令 $p=x,q=-y$，且对任意正整数 n，记 $d_n=(p+na,q+nb)$. 则 $d_n\mid r(p+na)-s(q+nb)$，即 $d_n\mid rp-sq+n(ra-sb)$. 由①可得

$$rp-sq=1,$$

而 $ra=sb=m$，因此，$d_n\mid1$，即 $d_n=1$. 所以，对任意正整数 n，$(p+na,q+nb)=1$. 命题获证.

例 10 对任意给定的自然数 $k(k>1)$，记 $n,n+1,\cdots,n+k$ 最小公倍数为 $Q(n)$，$n\in\mathbf{N}$. 证明：存在无穷多个 n，使得 $Q(n)>Q(n+1)$.

证明 令 $n=r\cdot k!-1, r\geqslant 3, r\in N$，我们证明对这样的 n 有 $Q(n)>Q(n+1)$.

记 $m=[n+1,n+2,\cdots,n+k]$，由于当 $j=1,2,3,\cdots k$ 时，$(n,j)=(j,1)=1$，从而有 $(n,n+j)=1, j=1,3,\cdots,k$. 于是 $Q(n)=nm$.

另外 $n+k+1=rk!+k$ 被 k 整除，m 被 $n+1=rk!$ 整除，从而被 k 整除，因此 $\frac{m(n+k+1)}{k}$ 不仅能被 m 整除，也能被 $n+k+1$ 整除，所以

$$\begin{aligned}Q(n+1)&=[n+1,n+2,\cdots,n+k,n+k+1]\\&=[m,n+k+1]\leqslant\frac{m(n+k+1)}{k},\end{aligned}$$

从而在 $r\geqslant 3, k\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}Q(n+1)&\leqslant\frac{m(n+k+1)}{2}=\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\\&\leqslant\frac{mn}{2}\left(1+\frac{k+1}{3k-1}\right)\\&<mn=Q(n).\end{aligned}$$

练 习 二 十 一

1. 证明：如果 u 和 v 是整数，u^2+uv+v^2 被 9 整除，那么 u 和 v 都被 3 整除.

2. 由数码 0,1,2,3,4,5,6 能组成若干个没有重复数字的七位数，其中有 55 的倍数，试在 55 的倍数的七位数中求出最大的和最小的数.

3. 设 a,b,c 是三个互不相等的正整数，求证：$a^3b-ab^3, b^3c-bc^3, c^3a-ca^3$ 三数中至少有一个能被 10 整除.

4. 已知自然数 a,b 使得 $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ 是整数，证明 a,b 的最大公约数不超过 $\sqrt{a+b}$.

5. 证明：对任意整数 n，$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ 是整数.

6. 证明：对每一自然数 m，数 1978^m-1 都不能被 1000^m-1 整除.

7. 假设 a,b,c,d 和 m 是这样的整数，使 am^3+bm^2+cm+d 能被 5 整除，且数 d 不能被 5 整除. 证明：总可以找到这样的整数 n，使得 dn^3+cn^2+bn+a 也能被 5 整除.

8. 求最大的正整数 k，使得集合 $\{1,2,\cdots,1000\}$ 的任何一个 $(1000-k)$ 元子集中都至少有两个元素互素.

9. (1) 对什么样的自然数 $n>2$，有一个由 n 个相继自然数组成的集合，使得集合中最大一个数是其余 $n-1$ 个数的最小公倍数的约数.

(2) 对什么样的 $n>2$，恰有一个集合具有上述性质?

10. (1) 设 $m,n\in\mathbf{N}$，证明：如果对于某些非负整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，数 $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$ 能被 2^m-1 整除，那么 $n\geqslant m$.

(2) 是否存在能被 $\underbrace{111\cdots1}_{m个1}$ 整除且数字和小于 m 的自然数?

第二十二讲 素数 合数 算术基本定理

知识点和方法述要

1. 定义　设整数 $p\neq 0,\pm 1$. 如果它除了约数 $\pm 1,\pm p$ 外,没有其他约数,那么,p 称为是不可约数,也称为素数. 若 $a\neq 0,\pm 1$ 且 a 不是不可约数,则 a 称为合数.

以后若没有特别说明,不可约数(素数)总是正的.

2. 设 a 是大于 1 的正整数,则 a 的除 1 以外的正约数中,最小的正约数 q 是素数,并且当 a 是合数时,有 $q\leqslant\sqrt{a}$.

3. 算术基本定理　若不计素因数的次序,则每一个大于 1 的整数 a 都可以惟一分解成素因数乘积的形式,即 $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$,其中 $p_1,p_2,p_3,\cdots,p_k$ 均为素数,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 为正整数.

从 n 的素因数分解中,我们又可以得到以下结论:

(1) n 的约数个数为

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=\prod_{j=1}^{k}(\alpha_j+1).$$

(2) n 的一切约数之和等于

$$(p_1^0+p_1^1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(p_2^0+p_2^1+p_1^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots$$

$$(p_k^0+p_k^1+\cdots+p_k^{\alpha_k})$$

$$=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$$

$$=\prod_{j=1}^{k}\frac{p_j^{\alpha_j}-1}{p_j-1}.$$

(3) 设 a,b 的素因数分解的标准式分别为 $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot p_k^{\alpha_k}$ 和 $b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_k^{\beta_k}$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 为素数,α_i 和 $\beta_i(i=1,2,\cdots k)$ 是非负整数,并记 $t_i=\min(\alpha_i,\beta_i)$, $s_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$, $i=1,2,\cdots,k$,则$(a,$

$b)=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\cdots p_k^{t_k}$，$[a,b]=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_k^{s_k}$.

例 题 精 讲

例1 求所有这样的素数，它既是两个素数的和又是两个素数的差.

解 设素数 P 即为所求，因 p 为两素数之和，故 $p>2$，且当两素数的和为 p 的其中一加数为偶数，这一加数为 2. 类似地可知，当 P 表示为两个素数之差时减数为 2，因此有 $p=q+2$，$p=r-2$，这里 q，r 都为素数，由于连续三个奇数中至少有一个被 3 整除，故 $p-2$，p，$p+2$ 中有一个等于 3. 显然，$p-2=3$ 故 $p=5$，即为所求.

例2 证明：存在无穷多个形如 $4n-1$ 的素数.

证明 假设形如 $4n-1$ 的素数是有限的，设 p 是这些素数中最大的一个，考察整数

$$P=2^2\cdot 3\cdot 5\cdots\cdot p-1$$

其中 $3\cdot 5\cdots p$ 表示所有不超过 p 的奇素数的乘积. 因 P 是 $4n-1$ 形式的且 $P>p$，故 P 是合数. 显然 P 的所有素因数必须大于 p. 由于 P 的素因数只能是 $4n+1$ 或 $4n-1$ 形的，而两个 $4n+1$ 形的数相乘仍是 $4n+1$ 形的. 因此，P 至少有一个 $4n-1$ 形的素因数，设为 q，而 $q>p$，矛盾，故命题成立.

例3 已知 $n\in\mathrm{N}$，且 $2n+1$ 与 $3n+1$ 都是完全平方数. 试问：$5n+3$ 能否为素数?

证明 设 $2n+1=k^2$，$3n+1=m^2$，k，$m\in\mathrm{N}$，则

$$\begin{aligned}5n+3&=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2\\&=(2k+m)(2k-m).\end{aligned}\qquad ①$$

若 $2k-m=1$，由①得 $5n+3=2m+1$，那么

$$\begin{aligned}(m-1)^2&=m^2-(2m+1)+2\\&=(3n+1)-(5n+3)+2=-2n<0\end{aligned}$$

矛盾，故 $2k-m\neq 1$，由此及①知 $5n+3$ 数，即 $5n+3$ 不能为素数.

例 4 已知 p 为正整数，$p,8p^2+1$ 是素数，证明：$8p^2-p+2$ 也是素数.

证明 对 p 分三种情形：

若 $p=3k(k\in\mathbf{N})$，因 p 为素数，故 $p=3$，此时 $8p^2+1=73$ 为素数，$8p^2-p+2=71$ 也为素数；

若 $p=3k+1(k\in\mathbf{N})$，则 $8p^2+1=8(3k+1)^2+1=3(24k^2+16k+3)$为合数，此类数也不合题意.

若 $p=3k+2(k\in\mathbf{N}\cup\{0\})$，则 $8p^2+1=8(3k+2)^2+1=3(24k^2+32k+11)$为合数，此类数也不合题意.

因此，若 $p,8p^2+1$ 是素数，则 p 只能为 3，从而 $8p^2-p+2=71$ 为素数.

例 5 找出具有下列性质的一切正整数 n，使集合 $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ 可以分成两个不相交的非空子集合，并且一个子集中所有元素的积与另一个子集合中所有元素的积相等.

解 假定存在自然数 n 满足题设要求，即 $\{n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5\}$ 能够分成两个非空的不相交的子集，其中一个子集的所有元素之积等于另一个子集的所有元素之积，则若素数 p 能整除 $n,n+1,n+2,n+3,n+4,n+5$ 这六个连续自然数中的一个必至少整除其中两个数. 因此，这样的素数 p 只能是 2,3 或 5. 数 $n+1,n+2,n+3,n+4$ 仅能有素因数 2 和 3. 注意到上述四个连续数中恰好只有两个奇数，这两个奇数决不可能有素因子 2，只可能有 3，所以两奇数必须是 3 的整数次幂，然而，这是不可能的，因为差 $3^k-3^m(k>1,m>1)$ 决不能等于 2(或 -2). 以上矛盾，说明满足题设条件的正整数 n 不存在.

例 6 求出最小的正整数 n，使其恰有 144 个不同的正约数，且其中有 10 个连续约数.

解 由于 n 的正约数中有 10 个连续整数，因此，n 必是 $2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ 的倍数.

设 n 的标准分解式为 $n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot\cdots\cdot P_k^{\alpha_k}$，则 $\alpha_1\geqslant3,\alpha_2\geqslant2,\alpha_3\geqslant1,\alpha_4\geqslant1$. n 的正约数的个数为

$$d(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=144. \quad ①$$

而 $$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)\geqslant 4\times3\times2\times2=48,$$

因此 $$(\alpha_5+1)(\alpha_6+1)\cdots(\alpha_k+1)\leqslant 3.$$

在 $\alpha_5,\alpha_6,\cdots,\alpha_k$ 中最多还有一个不为零,要使 n 最小,则 $k=5,0\leqslant\alpha_5\leqslant2$ 有

$$n=2^{\alpha_1}\cdot3^{\alpha_2}\cdot5^{\alpha_3}\cdot7^{\alpha_4}\cdot11^{\alpha_5}.$$

这里 $\alpha_1\geqslant3,\alpha_2\geqslant2,\alpha_3\geqslant1,\alpha_4\geqslant1,0\leqslant\alpha_5\leqslant2$. ①式变为

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)=144.$$

或 $$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)(\alpha_4+1)(\alpha_5+1)=144.$$

显然,当 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant\alpha_4\geqslant\alpha_5$ 时,n 最小.

由 $144=2\times2\times2\times2\times3\times3$,经验算知数(5,2,1,1,1)可使 n 最小.这样,最小的 $n=2^5\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11=110880$.

例 7 一个正整数,若它的每个因数都至少是两重的(即每个素因数的乘方次数都不小于 2),则称该正整数为"漂亮数",相邻两个正整数皆为"漂亮数",就称它们是一对"孪生漂亮数".例如 8 与 9 就是一对"孪生漂亮数".请你再找出两对"孪生漂亮数"来.

解 假若 n、$n+1$ 是一对"孪生漂亮数",则 $4n(n+1)$ 显然是"漂亮数",$4n(n+1)+1=(2n+1)^2$ 也是"漂亮数".于是,$4n(n+1)$,$4n(n+1)+1$ 是一对"孪生漂亮数".

依题设可知 $n=8$ 时,n,$n+1$ 是一对"孪生漂亮数",进而 $4n(n+1)=288$,$4n(n+1)+1=289$,288,289 也是一对"孪生漂亮数".再令 $n=288$,又可得一对"孪生漂亮数"为 332928、332929.

例 8 $f(n)$为定义在自然数集上的函数,当 p 为素数时,$f(p)=1$ 且对任意自然数 r,s 有

$$f(r\cdot s)=rf(s)+sf(r).$$

求满足 $f(n)=n(1\leqslant n\leqslant10^4)$的所有 n 的和.

解 依题设,对任何自然数 r,s,有

$$\frac{f(rs)}{rs}=\frac{f(r)}{r}+\frac{f(s)}{s}, \quad ①$$

从而有

$$\frac{f(p^m)}{p^m}=\frac{f(p)}{p}+\cdots+\frac{f(p)}{p}=m\cdot\frac{f(p)}{p}.$$

当 p 为素数时,可得

$$\frac{f(p^m)}{p^m}=\frac{m}{p}.$$

设 n 的标准分解式为 $n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$,则

$$\frac{f(n)}{n}=\frac{f(p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k})}{p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}}=\frac{f(p_1^{m_1})}{p_1^{m_1}}+\frac{f(p_2^{m_2})}{p_2^{m_2}}+\cdots+\frac{f(p_k^{m_k})}{p_k^{m_k}}$$

$$=\frac{m_1}{p_1}+\frac{m_2}{p_2}+\cdots+\frac{m_k}{p_k}$$

因此,$f(n)=n$ 等价于

$$\frac{m_1}{p_1}+\frac{m_2}{p_2}+\cdots+\frac{m_k}{p_k}=1,$$

$$m_1p_2p_3\cdots p_k+m_2p_1p_3\cdots p_k+\cdots+m_kp_1p_2\cdots p_{k-1}=p_1p_2p_3\cdots p_k \quad ②$$

由于 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 彼此互素,由①知 $k=1,m_1=p_1$,即 $n=p^{p_1}$.所以当 $1\leqslant n\leqslant 10^4$ 时 n 可取 $2^2,3^3,5^5$.从而有

$$2^2+3^3+5^5=3156,$$

即为所求.

例 9 设自然数 $n\geqslant 6$,求证:全体不大于 n 的合数可以重新排成一行,使得每两个相邻的数都有大于 1 的公因子.

证明 设 $p_1,p_2,\cdots,p_k,p_{k+1}$ 为按递增顺序排列的前 $k+1$ 个素数,且 $p_k\leqslant\sqrt{n}<p_{k+1}$.将不大于 n 的合数如下方法排列:

(i) 将 $p_1p_2,p_2p_3,\cdots,p_{k-1}p_k$ 按自左至右顺序排好;

(ii) 所有是 $p_i(2\leqslant i\leqslant k-1)$倍数的合数均置于 $p_{i-1}p_i$ 与 p_ip_{i+1}之间(这些合数间可不讲顺序),p_1 的倍数放在 p_1p_2 前,p_k 的倍数放在 $p_{k-1}p_k$ 后面.

显见上述序列任意相邻两项间公因数大于 1.所有不大于 n 的合

数均在这序列中，否则 $q \leqslant n (q \in N)$ 不在此序列中，则 $q \geqslant p_{k+1}^2 > n$，矛盾．故上述序列符合题设要求，命题获证．

练习二十二

一、填空题

1. 若数 $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$ 为合数，则正整数 n 的集合为________.

2. 21600 的约数个数为______，所有约数的和为________.

3. 若正整数 n 使得数 $n+1, n+3, n+7, n+9, n+13, n+15$ 都是素数，则 $n=$________.

二、解答题

4. 证明：素数的个数是无穷的．

5. 证明：存在无穷个自然数 a 具有下述性质，使得对一切自然数 n，数 $z=n^4+a$ 不是素数．

6. 设 a,b,c 是正整数，且 $p=a^b+c, q=b^c+a, r=c^a+b$ 都是素数，证明 p,q,r 中至少有两个相等．

7. 已知 a,b,c 是正整数，证明：

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][b,c][c,a]}=\frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(b,c)(c,a)}.$$

8. 求出所有不超过 10^7 且具有下列性质的自然数 $n(>2)$：任何与 n 互素且满足 $1<m<n$ 的数 m 都是素数．

9. 对任何正整数 n，证明：存在相继 n 个正整数，它们都不是素数的幂．

10. 证明，设 $m,n \in \mathrm{N}$，被 3 的正整数次幂整除；且 $1 \leqslant m < n < 1986$ 则所有形如 $\frac{1}{mn}$ 的数之和不是整数．

11. 已知 $n \geqslant 2$，求证：如果 k^2+k+n 对于整数 $k\left(0 \leqslant k \leqslant \sqrt{\frac{n}{3}}\right)$ 是素数，则 k^2+k+n 对于所有整数 $k(0 \leqslant k \leqslant n-2)$ 都是素数．

练习解答

练习一

一、选择题

1. **解** $X=\{2n+1(n\in Z)\}=\{$奇数$\}$,$4k\pm1(k\in Z)$是奇数,所以 $Y\subseteq X$.设 $x\in X$,$x=2n+1$.若 $n_0=2m_0$,$m_0\in Z$,则 $x=4m_0+1$,又若 $n_0=2m_0-1$,$m_0\in Z$,则 $x=4m_0-1$,故 $x\in Y$,所以 $X\subseteq Y$,于是 $X=Y$,选(C).

2. **解** 依题设有 $M\cup N\subseteq N$,又 $N\subseteq(M\cup N)$故 $N=M\cup N$.于是 $M\cap N=M$.选(A).

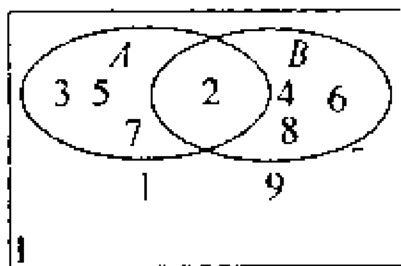
3. **解** 因 $x=y^2-1\geqslant-1$,故 $M=\{x\mid x\geqslant-1\}$.由 $y^2=-2(x-5)$得 $x=-\frac{1}{2}y^2+5\leqslant5$.故 $T=\{x\mid x\leqslant5\}$.综上所述,知 $M\cap T=\{x\mid-1\leqslant x\leqslant5\}$.应选$(C)$.

4. **解** 因 $P\subset M$,故 $M\cap P=P$,$P\cup M=M$.选(A).

5. **解** 注意到 M,N 的代表元素均为 y,不是有序实数对(x,y),实际上,$M=\{y\mid y\geqslant-1\}$,$N=\{y\mid y\in R\}$,选(D).

二、填空题

6. **解** 如文氏图所示.



(第6题)

7. **解** $x=0$时,$xy=0$,A 中元素重复,故 $x\neq0$,唯有 $xy-1=0$,又 $x=y=1$ 时,$x=xy=1$,A 中元素重复,因此 $x=y=-1$.此时 $xy=1$,$A=\{-1,0,1\}$,元素和为0.

8. **解** 分两种情形:(i)当 $a=0$时,$ax^2-2x+1=0$变为一次方程,有 $x=\frac{1}{2}$;(ii)当 $a\neq0$时,方程 $ax^2-2x+1=0$应有相等实根,故 $\Delta=4-4a=0$,即 $a=1$,可得等根 $x=1$.故 $a=0,1$.

9. **解** $P=\{-3,2\}$.若 $m=0$,则 $M=\emptyset\subset P$;若 $m\neq0$,则 $M=\{\frac{1}{m}\}$.当 $m=-\frac{1}{3},\frac{1}{2}$时,$\frac{1}{m}=-3,2$.故 m 的取值所成集合为$\{0,-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\}$.

10. **解** 由 $A\cap B=C$,可知$7\in A$,从而有 $x^2-x+1=7$,解得 $x_1=-2$,$x_2=3$.

当 $x=-2$ 时，$x+4=2\notin C$，可见 $A\cap B\neq C$. $x=-2$ 不合题意，应舍去.

当 $x=3$ 时，$x+4=7\in c$，此时 $2y=-1$，$y=-\frac{1}{2}$.

综上所述，知 $x=3$，$y=-\frac{1}{2}$.

三、解答题

11. **解** 依题设，知 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

(i) 若 $B=\phi$，则有 $m+1>2m-1$. 解得 $m<2$.

(ii) 若 $B\neq\phi$，则有 $m\geqslant 2$ 且 $m+1>5$，解得 $m>4$.

综上所述，$m<2$ 或 $m>4$.

12. **解** 因 $A=\{(x,y)\mid \frac{y-4}{x-2}=3, x\neq 2\}$，故 $\overline{A}=\{(x,y)\mid y=3x-2, x=2\}\cup\{(x,y)\mid y\neq 3x-2\}=\{(2,4)\}\cup\{(x,y)\mid y\neq 3x-2\}$. 又 $B=\{(x,y)\mid y=3x-2\}$，$(2,4)\in B$，所以 $\overline{A}\cap B=\{(2,4)\}$.

13. **解** 因 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant a\}$，所以

$$\begin{aligned} B &= \{y\mid y=2x+3, x\in A\} \\ &= \{y\mid -1\leqslant y\leqslant 2a+3\}. \end{aligned}$$

当 $a\geqslant 2$ 时，$C=\{z\mid z=x^2, x\in A\}=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant a^2\}$. 由 $C\subseteq B$ 得 $a^2\leqslant 2a+3$，即 $2\leqslant a\leqslant 3$;

当 $0\leqslant a<2$ 时，$C=\{z\mid 0\leqslant z\leqslant 4\}$. 由 $C\subseteq B$ 得 $\frac{1}{2}\leqslant a<2$;

当 $-2\leqslant a<0$ 时，$C=\{z\mid a^2\leqslant z\leqslant 4\}$. 由 $C\subseteq B$ 得 $4\leqslant 2a+3$，即 $a\geqslant\frac{1}{2}$，这与 $-2\leqslant a<0$ 矛盾.

综上所述，a 的取值范围为 $\{a\mid \frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 3\}$.

14. **解** 这个命题不正确. 我们可以举出下面的反例：取 $A=\{x,y\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}$ 且 $x^2+y^2\neq 0\}$. 显然 $C_r\cup A=A$. 因 $(0,0)\in C_r$，故 $C_r\cup B=A$. 所以 $C_r\cup A=C_r\cup B$. 但由 $(0,0)\in A$，$(0,0)\notin B$. 则有 $A\supset B$.

15. **证明** 由 S_1,S_2,S_3,T_1,T_2,T_3 组成的集合中仅有一个元素的结论显然成立. 设它有两个不同的元素 S,T. 由于

$$S_1S_2S_3=T_1T_2T_3. \qquad ①$$

故若 $S_1=S_2=S_3=S$，则 $T_1T_2T_3=T^3$ 或 T^2S，TS^2. 无论哪种情况均会导致 $S=T$ 的矛盾. 同样，$T_1=T_2=T_3$ 也会导致矛盾. 现设 $S_1=S_2=S$，$S_3=T$，则由①知 T_i 中有两个为 S，一个为 T，从而

$$S_1 + S_2 + S_3 = T_1 + T_2 + T_3$$

结论成立.

16. **解**　由 $A\cap X = B\cap X = A\cap B$ 知 $X\supseteq A\cap B$.

由 $A\cup B\cup X = A\cup B$ 知 $X\subseteq A\cup B$.

假设 $x\in X$ 但 $x\notin A\cap B$,因 $X\subseteq A\cup B$,故 $x\in A$ 且 $x\notin B$,或 $x\notin A$ 且 $x\in B$,这时总有 $A\cap X\neq B\cap X$.这与题设矛盾.所以 $x\in X$ 时,必有 $x\in A\cap B$.从而 $X\subseteq A\cap B$.

综上所述,$X = A\cap B$.

练习二

一、选择题

1. **解**　根据乘法原理,从甲地经丙地到乙地的乘车法有 $5\times 3 = 15$ 种.根据加法原理,从甲地到乙地共有不同乘车法 $4 + 15 = 19$ 种.选(B).

2. **解**　首位数字不为零的六位数有 9×10^5 个,首位数字不为零的七位数有 9×10^6 个.增加的电话数为 81×10^5.选(A).

3. **解**　区域2,4不同色,先涂区域2有5种办法,再涂区域4有4种办法;剩下三种颜色涂区域1,3,各有3种办法,根据乘法原理,得 $5\times 4\times 3\times 3 = 180$ 种办法,选(C).

4. **解**　三个顶点分别在正方形的三条边上时,从四条边取3条,有4种选法;每条边上选取1点又有3种选法,共计有 $4\cdot 3^3 = 108$ 种,两个顶点位于正方形的一条边上,第三个顶点在正方形的另一边时,有二个顶点的边有4种取法,在这边上从3点中取两点有3种取法,在其他边上取第三点有9种取法,共计有 $4\cdot 3\cdot 9 = 108$ 种.故共有三角形 $108 + 108 = 216$ 个,选(D).

5. **解**　考虑所给的元素较少可直接列举出符合条件的全部排列.

卡＼人	甲	乙	丙	丁
卡	乙	丙	丁	甲
	乙	丁	甲	丙
	乙	甲	丁	丙

先假设四人中的甲拿除自己写的贺卡外的三张中的任一张,如甲拿乙写的贺卡;四人中的乙可拿除自己写的贺卡外的三张贺卡中的任一张.如乙拿丙写的贺卡;四人中的丙只能拿丁写的贺卡;而丁只能拿甲写的贺卡,如表所示.又甲取丙或丁写的贺卡与上而甲取乙写的贺卡的情况类似,所以总共有 $3\times 3 = 9$ 种分配方法.选(B).

二、填空题

6. **解**　分三步，依次将3封信投入邮筒，分别有4种不同投信方式，根据乘法原理，共有不同投法 $4^3=64$ 种. 同样4名学生从3个不同楼梯下楼有 $3^4=81$ 种不同下法.

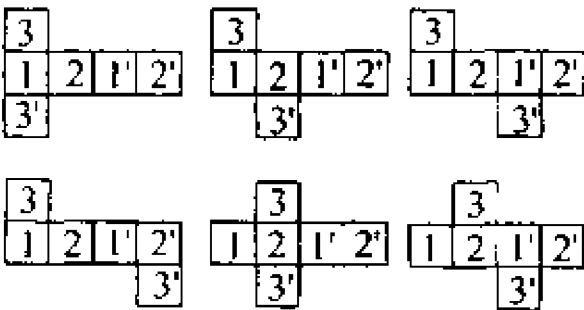
7. **解**　设 $x\leqslant y\leqslant z$ 分别是题设三角形的三边长，由题设知 $z=11$，又 $x+y>z$，从而 $2y>11$，所以 $6\leqslant y\leqslant 11$. 现按 y 的可能取值分类，列表如下：

y 的取值	x 可能的取值	三角形的个数
6	6	1
7	5,6,7	3
8	4,5,6,7,8	5
9	3,4,5,6,7,8,9	7
10	2,3,4,5,6,7,8,9,10	9
11	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11	11

所以，满足题设条件的三角形共有 $1+3+5+7+9+11=36$ 个.

8. **解**　把立方体互相邻接的某三个面记作1,2,3，与之相对的面分别记作1′,2′,3′. 注意到相对面是不相邻的，可分为三类：

（ⅰ）一行有四个面排成的有6种，如图所示；



（ⅱ）一行有三个面排成的有4种；

（ⅲ）一行有二个面排成的有1种.

总共有11种.

9. **解**　将结对的整个过程分为 n 个步骤，先随意地让其中一人出来，挑选他的一个配对者，有 $2n-1$ 种选法. 再从剩下的人中，随意地让其中一人出来，挑选他的一个配对者，有 $2n-3$ 种选法，又继续从剩下的人中随意地让其中一人出来，挑选他的一个配对者，有 $2n-5$ 种选法，…，这样一直进行下去，即可将

所有的人结为 n 个对子,根据乘法原理,一共有不同的结对方式

$$(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1=\frac{(2n)!}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\text{种}$$

10. **解** 为便于计数,在比 10000 小的正整数前面补零,成为形式上的四位数,如将 12 写作 0012,这不改变问题的实质.所有这些"四位数"(包括真正的四位数)中不含数字 1 的应有 9^4 个,这是因为每一位上均有 0,2,…,9 等 9 种可能情形,故所求含数字 1 的数有 $9999-9^4+1=3439$(个).

11. **解** 一种情况是,三位骑士依次相邻,那么有 25 种选法;另一种情况是,二位骑士是邻座,此时第三位骑士就不选在已经邻座的两旁,也就是说第三位只能在 21 位中任选一位,根据乘法原理有 25×21 种共有选法 $25+25\times21=550$ 种.

三、解答题

12. **解** 十位数的 10 个位置自左至右依次叫做第 1,2,…,10 位.符号"$i\to j$"表示第 i 位至第 j 位的数字都是 1,而第 $i-1$ 位与第 $j+1$ 位(如果有)不是数字 1.按连续出现 1 的长度把符合题设的十位数集 A 分为六类:

$$\begin{array}{ccccccccccc} &&&&&1&&&&& \\ &&&&2^0&&2^0&&&& \\ &&&2^1&&2^0&&2^1&&& \\ &&2^2&&2^1&&2^1&&2^2&& \\ &2^3&&2^2&&2^2&&2^2&&2^3& \\ 2^4&&2^3&&2^3&&2^3&&2^3&&2^4 \end{array}$$

(ⅰ) 有连续 10 个 1,惟一的一个.

(ⅱ) 恰有连续 9 个 1,其中 $1\to9$ 有 $1=2^0$ 个,$2\to10$ 有 $1=2^0$ 个.

(ⅲ) 恰有连续 8 个 1,其中 $1\to8$ 有 2^1 个,因为第 9 位必须是 2,第 10 位可取 1 或 2;$2\to9$ 有 $1=2^0$ 个,$3\to10$ 有 2^1 个.

(ⅳ) 恰有连续 7 个 1,其中 $1\to7$ 与 $4\to10$ 各有 2^2 个;$2\to8$ 与 $3\to9$ 各有 2^1 个.

(ⅴ)恰有连续 6 个 1,其中 $1\to6$ 与 $5\to10$ 各有 2^3 个;$2\to7$,$3\to8$,$4\to9$ 各有 2^2 个.

(ⅵ) 恰有连续 5 个 1,其中 $1\to5$,$6\to10$ 各有 2^4 个,$2\to6$,$3\to7$,$4\to8$,$5\to9$ 各有 2^3 个.

由加法原理得

$$|A|=1+3\cdot2^0+4\cdot2^1+5\cdot2^2+6\cdot2^3+2\cdot2^4=112.$$

注 将上述各类情形数排成右图,可得一般结论.

13. **解** (1) 把符合要求的串记作

$$d_1d_2\cdots d_k$$

因为每一个 $d_i(i=1,2,\cdots,k)$ 可以有两种选取(0或1)方式,则共可产生 2^k 个不同的0,1行,除去全为0的那种情形,至少有一个1的0,1串个数为 2^k-1.

(2) 由(1)知每一串都有 2^k-1 种不同的选法,而同时产生的串可以相同,根据乘法原理,则这样的串产生方式数为 $(2^k-1)^n$.

(3) 可构造 n 个长度为 k 的0,1串,如图.因为要求 $B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_k=S$,使 S 的每个元素至少属于某个子集,这样 n 个长度为 k 的0,1串的每一个至少有一个1.又 $B_1,B_2,\cdots,B_K$ 都作了不同的标记,因此 S 这样的 k 个子集选法有 $(2^k-1)^n$ 种.

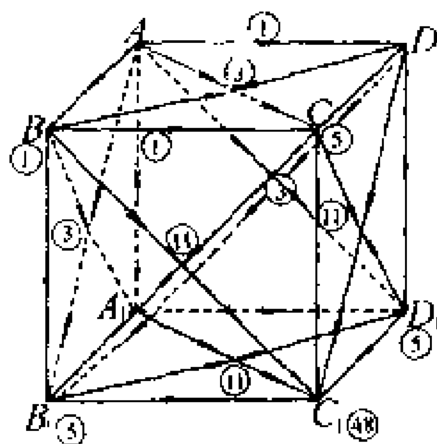
$B_1,B_2,\cdots,B_j,\cdots,B_k$
$a_1,0,0,\cdots,1,\cdots,1,$
$a_2,0,0,\cdots,1,\cdots,0,$
$\cdots\qquad\cdots$
$a_n,1,\quad\cdots,0,\cdots,0.$

14. **解** 设 $A\cup B=S$,对 S 中任一元素 a 恰好下列断言中一个正确:$a\in A,a\notin B$;$a\notin A,a\in B$;$a\in A$ 且 $a\in B$.所以如果 S 中有 n 个元素,则有 3^n 种方法选择集合 A 和 B.除了 $A=B$ 情况,每种情况算了2次.因为 $A\cup B=S,A=B$ 发生当且仅当 $A=B=S$,故 S 的子集对(并对 S)共有 $\frac{3^n-1}{2}+1$ 个.特别地 $n=6$,S 的子集对有365个,相对的有365种符合题设要求的分法.

15. **解** 如图,注意到立方体表面上 $\triangle BC_1D$ $\triangle DA_1C_1$ 等均为等边三角形,$\triangle ADC$ 等为等腰直角三角形,图中各节点上标的数字表示动点 P 到该节点时所有不同的运动路线数,自 A 至 C' 按要求运动共有

$$5\times3+11\times3=48$$

条不同路线.



(第15题)

练习三

一、填空题

1. **解** 若数列至少有34项 $a_1,a_2,\cdots,a_{34}$,则对一切 $i=1,2,\cdots,17,a_{i+1}+$

$a_{i+2}+\cdots+a_{i+17}$为奇数，故 a_i 为奇数，则 $\sum\limits_{i=1}^{17} a_i$ 为 17 个奇数之和，也为奇数，矛盾.

另一方面，33 个数所成数列

$$\underbrace{1,1,\cdots,1}_{16\text{个}1},2,\underbrace{1,\cdots,1,1}_{16\text{个}1}$$

满足要求. 故此数列至多有 33 项.

2. **解** $\overline{abc}+N$

$=\overline{abc}+\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}$

$=222(a+b+c)$

原题转化为求一个 222 的倍数 $222k$，使它大于 N(因为$\overline{abc}\neq 0$)，而小于 $N+1000$(因为$\overline{abc}$是三位数). 并且 $222k-N$ 的各位数字之和是 k，这样一来，$222k-N$ 就是所求的解$\overline{abc}$.

因为 $N=3194$，而 $14\times 222<3194$，$19\times 222>4194$，于是 k 可能是 15，16，17，18. 由于 $222\times 15-3194=136$，各位数字之和 10 不等于 15；$222\times 16-3194=358$，各位数字之和为 16；$222\times 17-3194=580$，各位数字之和 13 不等于 17；$222\times 18-3194=802$ 各位数字之和 10 不等于 18. 于是 $k=16$. 所求的$\overline{abc}=222\times 16-3194=358$.

3. **解** $n!=n(n-1)\cdots 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

$=24n(n-1)\cdots 5$

此时，$24\cdot n\cdot(n-1)\cdots 5$ 是 $n-3$ 个连续自然数之积，所以 $n=23$.

下面证明 $n=23$ 是符合条件的最大正整数 n. 若 $n>23$，则由

$$n!=k\cdot n(n-1)\cdots(n-t)=n(n-1)\cdots(n-t)k,$$

可知 $k>n$，从而 $k\geqslant 25$. 此时，k 至少是五个连续自然数之积，则 $n!$ 表示成少于 $n-3$ 个连续自然数之积，与题设不符.

所以，所求的最大正整数 n 为 23.

4. **解** 设“超凡平方数”为 $\overline{abc}$ 的平方，即$(100a+10b+c)^2=10^4a^2+2\times 10^3ab+2\times 10^2ac+10^2b^2+20bc+c^2$，则前面一段两位数小于 $a^2+2a+1=(a+1)^2$，只能是 a^2，因此 $a\geqslant 4$，又 $2000ab$ 为四位数，故 $a=4$，$b=1$(不合要求)或 $b=0$. 于是，$\overline{abc}$的平方变为 $10000a^2+200ac+c^2=(100a+c)^2$. 易验证得$(a,c)=(4,8)$，$(8,4)$. 故“超凡平方数”共有 2 个.

二、解答题

5. **证明** 假若命题不成立，则 $a_{20}-a_{19}, a_{19}-a_{18}, \cdots, a_2-a_1$ 这 19 个自然数中没有 4 个相同. 因此 1,2,3,4,5,6 在其中出现的次数至多是 3, 上述 19 个数中至少有一个数大于 6. 于是，有

$$70 > a_{20}-a_1=(a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+\cdots+(a_2-a_1)$$
$$\geqslant 7+(6+6+6)+(5+5+5)+\cdots+(1+1+1)=70,$$

矛盾. 命题获证.

6. **解** 设书刊载的故事篇幅的面数由先到后依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$，则 $\{a_1, a_2, \cdots, a_{30}\}=\{1,2,\cdots,30\}$. 记 $S_i=\sum\limits_{k=1}^{i}a_k(i=1,2,\cdots,29)$，则第 i 个故事从奇数面开始等价于 S_{i-1} 为偶($S_0=0$). 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$ 中的 15 个奇数依次为 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_{15}}(i_1<i_2<\cdots i_{15})$，那么 $S_{a_{i_1}-1}, S_{a_{i_3}-1}, \cdots, S_{a_{i_{13}}-1}$ 分别与 $S_{a_{i_1}}, S_{a_{i_3}}, \cdots, S_{a_{i_{13}}}$ 的奇偶性不同且 $a_{i_1}<a_{i_3}-1, a_{i_3}<a_{i_5}-1, \cdots, a_{i_{11}}<a_{i_{13}}-1, a_{i_{13}}<30$，故 $S_0, S_1, \cdots, S_{29}$ 中至少有 7 个奇数，至多有 23 个偶数. 又当 $a_1, a_2, \cdots, a_{30}$ 依次为 $2,4,6,\cdots,30,1,3,5,\cdots,29$ 时仅有 $S_{16}, S_{18}, \cdots, S_{28}$ 是奇数，其他 23 个是偶数. 故最多可能有 23 个故事是从奇数编号的面起头的.

7. **解** (1) 取 $x=1, y=8$ 即可.

(2) 假设存在 x, y 满足 $988\leqslant x\leqslant y\leqslant 1991, x, y\in\mathrm{N}$ 满足题意要求，则 $x^2<xy+x\leqslant xy+y$. 因此，有

$$y-x=(xy+y)-(xy+x)>(x+1)^2-x^2=2x+1,$$

即 $y>3x+1$. 于是 $1991\geqslant y>3x+1\geqslant 3\times 998+1$. 矛盾. 故回答是否定的.

8. **证明** 显然 $x_3\geqslant x_4\geqslant\cdots\geqslant x_{21}$. 若有某个 j 使得 $x_j=x_{j+1}$，那么 $x_{j+2}=0(1\leqslant j\leqslant 19)$，于是 $x_{21}=0$. 因此. 不妨设 $x_3>x_4>\cdots>x_{20}\geqslant x_{21}$ 且 $x_1>x_2$，则 $k\geqslant 3$ 时，有 $x_k\leqslant x_{k-2}-x_{k-1}$，即

$$x_{k-2}\geqslant x_k-x_{k-1}.$$

若 $x_{21}\geqslant 1$，有 $x_{20}\geqslant 1$. 于是 $x_{19}\geqslant 2, x_{18}\geqslant 3, x_{17}\geqslant 5, x_{16}\geqslant 8, x_{15}\geqslant 13, \cdots, x_2\geqslant 6745, x_1\geqslant 10916$，这与 $x_1\leqslant 10000$ 矛盾. 故 $x_{21}=0$.

9. **证明** 设 a, b, c, d 为自然数，且 $n^2<a<b<c<d<(n+1)^2$. 显然，$ab<cd, ac<bd$. 若 $ad=bc$，则

$$(a+d)^2-(a-d)^2=(b+c)^2-(b-c)^2. \qquad ①$$

因为 $d-a>c-b>0$，所以由①知 $a+d>b+c$，且

$$(d-a)^2>(a+d)^2-(b+c)^2$$
$$=(a+d+b+c)(a+d-b-c)$$

$$\geqslant a + d + b + c > 4n^2, \qquad ②$$

又 $$d - a < (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$

可得 $$(d - a)^2 \leqslant 4n^2. \qquad ③$$

②与③矛盾，故 $ad \neq bc$. 由上述证明知命题成立.

10. **证明** 由①可得

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = s - \sqrt{r}$$

$$\Leftrightarrow p + 2\sqrt{pq} + q^2 = s^2 + r - 2s\sqrt{r} \qquad ②$$

$$\Leftrightarrow (s^2 + r - p - q)^2 = 4(pq + s^2 r + 2s\sqrt{pqr}). \qquad ③$$

③式左边是整数，右边也应是整数，故$\sqrt{pqr}$是有理数，设 $a = \sqrt{pqr}$代人②得

$$s^2 + r - p - q = 2s\sqrt{r} + \frac{2a}{r}\sqrt{r},$$

故$\sqrt{r}$是有理数. 注意到 r 是正整数，故 r 为平方数. 同理可证 p, q 也是平方数.

11. **证明** 只需证明存在正整数 x, y，使得 $1 < x \leqslant y$ 且 $xy > m > x(y-1)$. 因为此时以 x, y 为边长的矩形满足题设要求.

设 $k^2 \leqslant m < (k+1)^2$，分以下几种情形：

(i) $m = k^2$，令 $x = k - 1, y = k + 2$，则 $k \geqslant 4$，有

$$xy = k^2 + k - 2 > m > k^2 - 1 = x(y-1).$$

(ii) $k^2 < m < k(k+1)$. 令 $x = k, y = k + 1$，则 $k \geqslant 4$，有

$$xy = k(k+1) > m > k^2 = x(y-1).$$

(iii) $m = k(k+1)$. 令 $x = k - 1, y = k + 3$，则 $k \geqslant 4$，有

$$xy = k^2 + 2k - 3 > m > k^2 + k - 2 = x(y-1).$$

(iv) $k(k+1) < m < (k+1)^2$. 令 $x = y = k + 1$，则 $k \geqslant 3$，有

$$xy = (k+1)^2 > m > k(k+1) = x(y-1).$$

综上所述，命题获证.

12. **证明** 若 a 为奇数，取 $c = \frac{1}{2}(a^2+1), b = \frac{1}{2}(a^2-1)$，则 $c > b > a$，且 $c^2 = b^2 + a^2$；若 a 为偶数，取 $c = \frac{a^2}{4} + 1, b = \frac{a^2}{4} - 1$，则因 $a \geqslant b$，有 $c > b > a$ 且 $c^2 = a^2 + b^2$. 综上所述，命题成立.

练习四

一、选择题

1. **解** 根据定义，集合 A 中任何一个元素在集合 B 中都有惟一的元素和它对应，故(D)不正确．定义中并未要求集合 B 中每一个元素都是集合 A 中元素的像，故(A)，(B)不正确，(C)是正确的．应选(C)．

2. **解** 在(A)中，集合 A 中元素 0 在 B 中没有像；在(B)中集合 A 中元素 3 在集合 B 中没有像．根据映射定义，(A)，(B)不正确，在(D)中集合 A 中元素 2，在集合 B 中有元素 6，12，18 都是它的像，也与映射定义不符，故(D)不正确．(C)符合映射定义，应选(C)．

3. **解** 根据映射定义，(2)中 A 集合的 $0 \leqslant x < z$ 时的 x 无像，故(2)无法构成映射，(1)、(3)，(4)都能构成映射，应选(C)．

4. **解** x 和 $f(x)$ 同为偶数，或者同为奇数．当 $x=0$ 时，有三种：$-2,0,2$；当 $x=-1$ 时，对 -1 或 1 各两种，共 4 种．故总共是 $3\times4=12$ 个，应选(C)．

5. **解** 列表如下：

$f(a)$	0	0	1	-1	0	1	-1
$f(b)$	-1	0	1	-1	1	0	0
$f(c)$	1	0	0	0	-1	1	-1

选(D)．

6. **解** 分三类讨论：a,b,c,d 的象都为 2 的 f 有 1 个；a,b,c,d 的象为 1，1，3，3 的 f 有 6 个；a,b,c,d 的象为 1，2，2，3 的 f 有 12 个，共 $1+6+12=19$ 个．选(B)．

二、填空题

7. **解**

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{x-1}{x}\right) &= f\left(1-\frac{1}{x}\right)\\
&= 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+1\\
&= \left(1-\frac{1}{x}\right)-\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)+1
\end{aligned}
$$

$$=(1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{x})(-1-\frac{1}{x})+1$$

$$=(1-\frac{1}{x})+(1-\frac{1}{x})\cdot[(1-\frac{1}{x})-2]+1$$

$$=(1-\frac{1}{x})^2-(1-\frac{1}{x})+1,$$

故 $f(x)=x^2-x+1$.

8. **解** 令 $x=(1+\frac{x}{2})^2-2, x\in[-2,+\infty)$,得 $x=2, x=-2$,经检验知原方程的解集为$\{-2,2\}$.

9. **解** $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\in(0,\sqrt{2})$,则 $\begin{cases}\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=y,\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\frac{2}{y},\end{cases}$ 解得 $x=\frac{y^2}{4}+\frac{1}{y^2}$.故所求反函数为 $y=\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x^2}(x\in(0,\sqrt{2}))$.

10. **解** 分别用 $\frac{x-1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$ 代换 x,可得 $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2x-1}{x}$, $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2-x}{1-x}$,从所得三个等式中消 $f(\frac{x-1}{x})$, $f(\frac{1}{1-x})$,得 $f(x)=\frac{1-x^2-x^3}{2x(1-x)}(x\neq0,1)$.

11. **解** 由 $-1=2-3\sqrt{4x-x^2-3}$,得 $x=2$.即 $f(-1)=2$.再由 $2=3-2\sqrt{4x-x^2-3}$,得 $x_1=1, x_2=3$.注意到 $x\in[1,2]$,所以取 $x=1$,即 $f[f(-1)]=1$.

12. **解** 显然 $y\geqslant0$,且 $x=0$ 时 $y=0$,又

$$y=\frac{\sqrt{(x^2+8)(8x-x^2)}}{x+1}$$

$$\leqslant\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x^2+8+8x-x^2}{2}$$

$$=4,$$

当且仅当 $x^2+8=8x-x^2$,即 $x=2$ 时,$y=4$.于是 $0\leqslant y\leqslant4$. $f(x)$的值域为$[0,4]$.

三、解答题

13. **解** 因 $f(x)=1-x$,所以

$$g(x)=\frac{1}{2-f(x)}=\frac{1}{2-(1-x)}=\frac{1}{1+x}.$$

于是，有

$$f(g(x))=1-g(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x};$$

$$g(f(x))=\frac{1}{1+f(x)}=\frac{1}{1+(1-x)}=\frac{1}{2-x}.$$

14. **解** (1) $x=0$ 时，$x\cdot f(x)=0\cdot f(0)=0$，故满足要求的常数只能是 0，为使 $x\neq0$ 时，$xf(x)=0$，只有 $f(x)=0$，即 $f(1)=f(-1)=0$。因为 $f(0)$ 的值可以是 B 中任一元素，故满足要求的 f 有 5 个.

(2) 为使 $x+f(x)$ 是偶数，x 与 $f(x)$ 必须同奇或同偶. 这样 $f(0)$ 可取 $-2,0,2$ 三个值中的一个，$f(\pm1)$ 分别可取 $-1,1$ 两个值中的一个，因此满足要求的 f 共有 $3\times2\times2=12$ 个.

(3) $x=0$ 或 1 时，$f(x)=f(x^2)$ 总成立，因此 $f(0)$ 与 $f(1)$ 各有 5 种取法. $f(-1)=f((-1)^2)=f(1)$. 这样，当 $f(1)$ 取定后，$f(-1)$ 只能是 $f(1)$，而没有其他取法，因此满足要求的 f 共有 $5\times5=25$ 个.

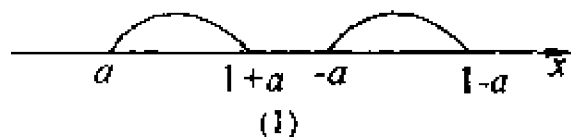
15. **解** 记 $g_1(x)=x+a$，$g_2(x)=x-a$，则函数 $F(x)$ 为两复合函数 $f(g_1(x))$，$f(g_2(x))$ 的代数和. 依题设，$F(x)$ 的定义域应为下列不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant1,\\0\leqslant x-a\leqslant1\end{cases}\qquad(\text{I})$$

的非空集，(Ⅰ) 可改写为

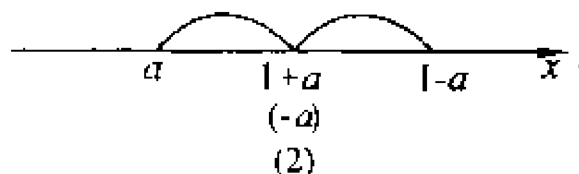
$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant1-a,\\a\leqslant x\leqslant1+a.\end{cases}\qquad(\text{II})$$

(ⅰ) 当 $1+a<-a$，即 $a<\frac{-1}{2}$ 时，如图(1)所示，不等式组(Ⅱ)的解集为空集，$F(x)$ 不能成为函数.



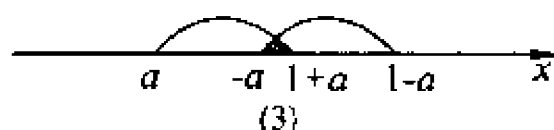
(1)

(ⅱ) 当 $1+a=-a$，即 $a=-\frac{1}{2}$ 时，如图(2)所示，函数 $F(x)$ 的定义域为 $\{\frac{1}{2}\}$.



(2)

（ⅲ）当 $a<-a<1+a$，即 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，如图(3)所示，函数 $F(x)$ 的定义域为 $[-a,1+a]$.



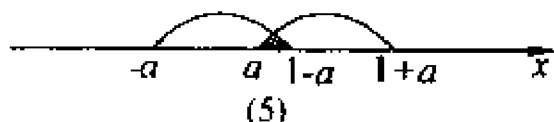
(3)

（ⅳ）当 $a=-a$，即 $a=0$ 时，如图(4)所示，函数 $F(x)$ 的定义域为 $[0,1]$.



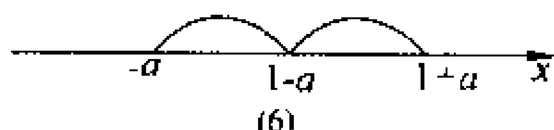
(4)

（ⅴ）当 $-a<a<1-a$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，函数定义域为 $[a,1-a]$，如图(5)所示

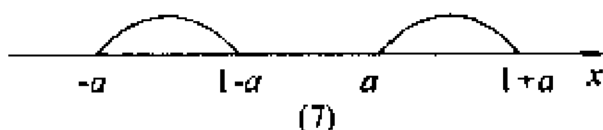


(5)

（ⅵ）当 $a=1-a$，$a=\frac{1}{2}$ 时，如图(6)所示，函数 $F(x)$ 定义域为 $\{\frac{1}{2}\}$.



(6)



(7)

（ⅶ）当 $a>1-a$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，如图(7)所示，不等式组的解集为 $\varnothing$，$F(x)$ 不能成为函数.

16. 解　$f(\frac{1}{2})=f(\frac{0+1}{2})=af(1)=a$，$f(\frac{1}{4})=af(\frac{1}{2})=a^2$，$f(\frac{3}{4})=f(\frac{\frac{1}{2}+1}{2})=(1-a)f(\frac{1}{2})+af(1)=2a-a^2$，于是 $a=f(\frac{1}{2})=f(\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{2})=(1-a)a^2+a(2a-a^2)$ 化简得 $a(a-1)(a-\frac{1}{2})=0$，$a=\frac{1}{2}$. 从而 $f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}[f(x)+f(y)]$. 特别地，取 $x=0$，得 $f(y)=2f(\frac{y}{2})$. 于是 $f(\frac{2}{7})=2f(\frac{1}{7})$，$f(\frac{4}{7})=2f(\frac{2}{7})=4f(\frac{1}{7})$. 又 $f(\frac{4}{7})=f(\frac{\frac{1}{7}+1}{2})=\frac{1}{2}[f(\frac{1}{7})+1]$，所以 $8f(\frac{1}{7})=f(\frac{1}{7})+1$，$f(\frac{1}{7})=\frac{1}{7}$.

17. **解** 令 $y=1$，由(ⅱ)得

$$f(x)=f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+1, \quad ①$$

由(ⅰ)知 $f(1)=2$，代入①得

$$f(x+1)-f(x)=1. \quad ②$$

②中取 $x=0$，由(ⅰ)知

$$f(0)=1.$$

由②知，对任意正整数 n，

$$\begin{aligned} f(x+n) &= f[x+(n-1)]+1 \\ &= \cdots\cdots\cdots \\ &= f(x)+n. \end{aligned} \quad ③$$

③中取 $x=0$，有

$$f(n)=f(0)+n=n+1.$$

对任意负整数 m，取 $x=m$，$n=-m$，由③得

$$f(0)=f(m)-m,$$

从而

$$f(m)=m+1.$$

综上所述，对任意整数 n，有 $f(n)=n+1$ 及③成立.

取 $x=\frac{1}{m}$（m 为整数），由③得

$$f(m+\frac{1}{m})=m+f(\frac{1}{m}). \quad ④$$

再在(ⅱ)中令 $x=m$，$y=\frac{1}{m}$，得

$$f(1)=f(m)\cdot f(\frac{1}{m})-f(m+\frac{1}{m})+1. \quad ⑤$$

由④、⑤及 $f(1)=2$，$f(m)=m+1$，可得

$$f(\frac{1}{m})=1+\frac{1}{m}. \quad ⑥$$

又在(ⅱ)中令 $x=n$，$y=\frac{1}{m}$，并以 $f(n)=n+1$ 及③、⑥代入即得 $f(\frac{n}{m})=\frac{n}{m}+1$. 至此可知，所求从 Q 到 Q 的函数为 $f(x)=x+1$.

练习五

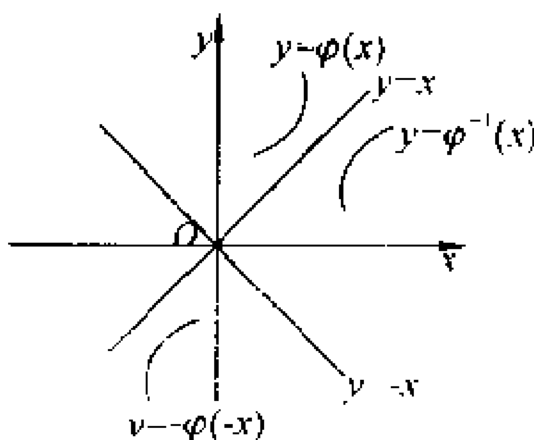
一、填空题

1. **解** 因 $f(x)=|x+a|$ 在 $x\geqslant -a$ 上单调递增,故 $-a\leqslant 3$,即 $a\geqslant -3$.

2. **解** 由 $\frac{1}{2}<x^2-1<2$ 可得 $-\sqrt{3}<x<-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}<x<\sqrt{3}$. 而在 $(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2})$ 内,x^2-1 的值递减,故 $f(x^2-1)$ 的值随 x 的增大而减小,即 $y=f(x^2-1)$ 在 $(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{6}}{2})$ 内为减函数. 同样可知在 $(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{3})$ 内 $y=f(x^2-1)$ 是增函数.

二、选择题

3. **解** 第二个函数是 $y=\varphi^{-1}(x)$. 利用图形易知,第三个函数与第一个函数关于原点成中心对称,即 $y=-\varphi(-x)$. 选(B).



(第 3 题)

4. **解** 因 $f(x+3)=-f(x)$,故 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$,$f(x)$ 是以 6 为周期的周期函数. 又因 $f(x)$ 是奇函数,且当 $0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$f(x)=x$,则有 $f(1)=1$. 所以,$f(1997)=f(6\times 333-1)=f(-1)=-f(1)=-1$. 选(C).

5. **解** $y=f(x)\xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位}}y=f(x)+3\xrightarrow{\text{向右平移 2 个单位}}y=f(x-2)+3\xrightarrow{\text{关于 }y=-x\text{ 对称}}-x=f(-y-2)+3\xrightarrow{f\text{是奇函数}}-x=-f(y+2)+3\longrightarrow f(y+2)=x+3\xrightarrow{\text{存在反函数}}y+2=f^{-1}(x+3)\xrightarrow{\text{变形}}y=f^{-1}(x+3)-2$. 选(C).

6. **解** 令 $x+a=x'$, $y-b=y'$, 函数 $y=f(x+a)+b$ 与函数 $y=f^{-1}(x+a)+b$ 分别为 $y'=f(x')$, $y'=f^{-1}(x')$, 这两个函数的图象关于 $y'=x'$ 对称, 即关于 $y-b=x+a$ 对称, 因此选(A).

7. **解** 依题设,$f(-x+2)=f(x+2)$. 于是 $f(\frac{5}{2})=f(2+\frac{1}{2})=f(2-\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})$, $f(\frac{7}{2})=f(2+\frac{3}{2})=f(2-\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})$. 又 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上递增, 故 $f(\frac{1}{2})<f(1)<f(\frac{3}{2})$, 选(B).

三、解答题

8. **解** 设 $0<x_1<x_2<1$,则

$$f(x_2) - f(x_1)$$
$$= x_2^{-\frac{2}{3}} - 2x_2^{-\frac{1}{3}} + 3 - x_1^{-\frac{2}{3}} + 2x_1^{-\frac{1}{3}} - 3$$
$$= (x_2^{-\frac{1}{3}} - x_1^{-\frac{1}{3}})(x_2^{-\frac{1}{3}} + x_1^{-\frac{1}{3}} - 2).$$

注意到在区间(0,1)上,函数 $y = x^{-\frac{1}{3}}$为减函数,故 $x_2^{-\frac{1}{3}} < x_1^{-\frac{1}{3}}$.因 $x_2^{-\frac{1}{3}} > 1, x_1^{-\frac{1}{3}} > 1$,所以 $x_2^{-\frac{1}{3}} + x_1^{-\frac{1}{3}} > 2$,有

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^{-\frac{1}{3}} - x_1^{-\frac{1}{3}})(x_2^{-\frac{1}{3}} + x_1^{-\frac{1}{3}} - 2) < 0,$$

所以$f(x)$在区间 (0,1)上为减函数.

9. **证明** (1)设 $x_1 < x_2$,则

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 + x_2 + 1) - (x_1^3 + x_1 + 1)$$
$$= (x_2^3 - x_1^3) + (x_2 - x_1)$$
$$= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1)$$
$$= (x_2 - x_1)\left[(x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3x_1^2}{4} + 1\right] > 0,$$

故$f(x_2) > f(x_1)$,函数 $f(x)$是增函数.

(2)假若满足$f(x) = 0$的实数 x 不止一个,设为 x_1, x_2,且 $x_1 < x_2$,那么 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,注意到(1),应有 $f(x_1) < f(x_2)$,矛盾.故命题(2)成立.

10. **解** $f(x)$为偶函数,有 $f(-x) = f(x)$. $g(x)$为奇函数,有 $g(-x) = -g(x)$.于是

$$F(-x) = \frac{[f(-x)]^2 - [g(-x)]^2}{f(-x)g(-x)} = \frac{[f(x)]^2 - [g(x)]^2}{-f(x)g(x)} = -F(x),$$

故 $F(x)$为奇函数,其图象关于原点对称.

11. **证明** 设函数$f(x)$的定义域在数轴上表示关于原点对称,则$f(x)$, $f(-x)$同时有意义.又设 $p(x)$和 $q(x)$分别是与$f(x)$相同定义域的奇函数和偶函数,使得

$$f(x) = p(x) + q(x), \quad ①$$

则
$$f(-x) = p(-x) + q(-x),$$

即
$$f(-x) = -p(x) + q(x). \quad ②$$

由①,②解得

$$p(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

$$q(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

不难验证，$p(x)$和$q(x)$分别为奇函数和偶函数，由①知命题成立.

12. **证明** 因为$f(x)$与$g(x)$互为反函数，其图象关于直线$y=x$对称，故若点$(x,f(x))$在$y=f(x)$的图象上，则点$(f(x),x)$必在$y=g(x)$的图象上，即有$x=g[f(x)]$.因此，可得

$$a+b=g[f(a+b)]=g[f(a)\cdot f(b)]. \qquad ①$$

又 $\quad a=g[f(a)],b=g[f(b)],$

代入①即得 $a+b=g[f(a)]+g[f(b)]=g[f(a)\cdot f(b)], \qquad ②$

由②式即知命题成立.

13. **证明** 依题设，对任意实数x，存在实数$x_1\in[-1,1]$及整数k，使得

$$x=2k+x_1,$$

所以 $\quad f(-x)=f(-2k-x_1)=f(-x_1)=(-x_1)^2=x_1^2,$

$$f(x)=f(2k+x_1)=f(x_1)=x_1^2,$$

故$f(-x)=f(x)$，函数$f(x)$为偶函数.

14. **解** 反函数$f^{-1}(x)=\frac{2x^4-1}{4-3x^4}(x>0,x\neq\sqrt[4]{\frac{4}{3}})$，因函数$f(x)$在其定义区间$(-\infty,-\frac{2}{3})$与$[-\frac{1}{4},+\infty)$上均单调递增，其反函数具有相应的单调性，$f(x)=f^{-1}(x)$的实根必是函数$f(x)$与直线$y=x$交点的横坐标.解方程：$x=\frac{2x^4-1}{4-3x^4}$.注意到$x>0,3x^4+5x^3+5x^2+5x+1>0$，得$x=1$.

15. **解** 对$k\in\mathbf{N}$，

$$f(f(k))=3k, \qquad ①$$

故$f[f(f(k))]=f(3k)$，又$f(f(f(k)))=3f(k)$，所以

$$f(3k)=3f(k). \qquad ②$$

若$f(1)=1$，代入①得$f(1)=3$，矛盾.所以$f(1)=a>1$.但$f(f(1))=f(a)=3$，由$f(k)$严格递增，即$1<a$，知$f(1)<f(a)=3$，故只能$f(1)=2,f(2)=3$.此时

$$f(3)=3f(1)=6, \qquad f(6)=f(3\cdot 2)=3f(2)=9,$$

$$f(9)=3f(3)=18, \qquad f(18)=3f(6)=27,$$

$$f(27)=3f(9)=54, \qquad f(54)=3f(18)=81.$$

注意到自变量由27变到54，增加27个数，函数值相应由54增至81，也增加27

个数.由 $f(x)$ 严格递增性知 $f(28)=55, f(29)=56, f(30)=57, f(31)=58, f(32)=59, \cdots$,注意到

$$f(96)=f(3\times 32)=3f(32)=3\times 59=177,$$

所以

$$f(1)+f(9)+f(96)=2+18+177=197.$$

练习六

一、选择题

1. **解** 函数 $y=\sqrt{(2+x)(6-x)}$ 的定义域是 $[-2,6]$.当 $x=2$,它有最大值4;当 $x=-2$ 或 $x=6$ 时,它有最小值0.故选(C).

2. **解** 依题设知抛物线开口向下(于是 $a<0$),且与正 y 轴有交点(于是 $c>0$),所以排除(B),(D).又对称轴在 y 轴左方(于是 $-\frac{b}{2a}<0$),可知 $b<0$.综合知 $a<0, b<0, c>0$.故选(A).

3. **解** 方程有实根,$\Delta\geqslant 0$,即 $m^2-3m+4\geqslant 0$,该不等式对一切 $m\in R$ 成立.根据韦达定理,$g(m)$ 是 m 的二次函数(其中令 $g(m)=(\alpha-1)^2+(\beta-1)^2$).二次项系数为正,$m\in R$,故 $g(m)$ 有最小值无最大值.选(A).

4. **解** 依题设,$y=f(x)$ 的图象关于 $x=\frac{1}{2}$ 对称.构造函数如 $f(x)=(x-\frac{1}{2})^2$ 知 $f(-2)>f(2)>f(0)$,故选(C).

二、填空题

5. **解** 由 $f(x)\geqslant x$ 得 $x^2(x^2+px+q)\geqslant 0$.它对任意 $x\in R$ 都成立,故 $p^2-4q\leqslant 0$.再由 $f(1)=1$,得 $p+q+2=1$,即 $q=-p-1$,代入 $p^2-4q\leqslant 0$ 得 $(p+2)^2\leqslant 0$.故 $p=-2, q=1$.

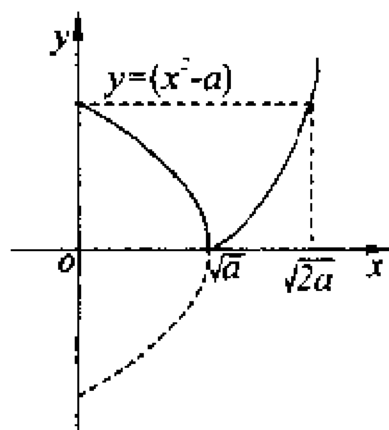
6. **解** $f(x)=4(x-\frac{a}{2})^2-2a+2$.当 $0\leqslant\frac{a}{2}\leqslant 2$,即 $0\leqslant a\leqslant 4$ 时,$f(x)_{min}=-2a+2=2$,可得 $a=0$;当 $\frac{a}{2}<0$,即 $a<0$ 时,$f(x)_{min}=f(0)=a^2-2a+2=2$,解得 $a=0,2$ 与 $a<0$ 不符;当 $\frac{a}{2}>2$ 即 $a>4$ 时,$f(x)_{min}=f(2)=16-8a+a^2-2a+2=2$,可求得 $a=2,8$,其中 $a=2$ 与 $a>4$ 不符.综上所述,$a=0,8$.

7. **解** 函数定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$,又 $y^2=1+2\sqrt{x(1-x)}=1+2\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$,

$y\geqslant 0$,故 $1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}$.所求值域为$[1,\sqrt{2}]$.

8. **解** 设$f(x)=7x^2-(p+13)x+p^2-p-2$.依题意得$f(0)>0,f(1)<0,f(2)>0$.解得 p 的范围是$(-2,-1)\cup(3,4)$.

9. **解** 因为$f(x)$是偶函数,所以 $M(a)$是 $f(x)$在区间 $0\leqslant x\leqslant 1$ 内的最大值.



(第9题)

当 $a\leqslant 0$时,$M(a)=1-a$.当 $a>0$时,从图象可见:

(i)若$\sqrt{2a}\geqslant 1$,则 $M(a)=a$;

(ii)若$\sqrt{2a}\leqslant 1$,则 $M(a)=f(1)=1-a$.

故 $M(a)=\begin{cases}1-a & a\leqslant\dfrac{1}{2},\\ a & a\geqslant\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

由于 $a<\dfrac{1}{2}$时 $M(a)$减少,$a>\dfrac{1}{2}$时 $M(a)$增加,故可知 $a=\dfrac{1}{2}$时 $M(a)$最小,且最小值 $M(\dfrac{1}{2})=\dfrac{1}{2}$.

三、解答题

10. **证明** 原方程可变为

$$f(x)=(1+t)x^2-[(a+c)+(b+d)t]x+(ac+bdt)=0,$$

于是有$f(b)=(b-a)(b-c)<0,f(d)=(d-a)(d-c)>0$.故 $f(x)=0$存在两不等实根.

11. **解** 根据(i),有

$$a+2b+4c=1524. \qquad ①$$

(1) 若$|\dfrac{b}{2a}|\geqslant 1$,函数 $g(x)$在定义域上单调.

当 $a<0$时,有

$$a-b+c=364, \qquad ②$$
$$a+b+c=444, \qquad ③$$

由①,②,③构成的方程组无解.

当 $a>0$时,有

$$a-b+c=444, \qquad ④$$
$$a+b+c=364, \qquad ⑤$$

由①,④,⑤联立的方程组解得 $a=4,b=-40,c=400$.

(2) 若$|\dfrac{b}{2a}|<1$,且 $a>0$,这时$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=444$且 $a+b+c=364$或 $a-b+c=364$.由

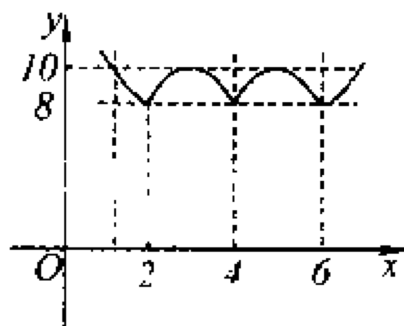
上述各式联立的方程组无解.

(3) 若$|\frac{b}{2a}|<1$且$a<0$,这时$\frac{4ac-b^2}{4a}=364$且$a+b+c=444$或$a-b+c=444$.由上述各式联立的方程组无解.

综上所述,$a=4,b=-40,c=400$.

12.解

$$f(x)=\begin{cases}4(x-4)^2-8 & x\in(-\infty,2)\cup[6,+\infty).\\ -2(x-3)^2+10 & x\in[2,4).\\ -2(x-5)^2+10 & x\in[4,6).\end{cases}$$



(第12题)

如图所示,可知$k<8$时无实根;$k=8$时,有三个实根;$8<k<10$时,有六个实根;$k=10$时有4个实根;$k>10$时有两个实根.

13. 解 设$x^2+2x+4=t$,则$t=(x+1)^2+3\geqslant 3$,于是

$f(x)=g(t)=at^2+3at+b\quad(t\geqslant 3)$.因它有最小值,故$a>0$.又$-\frac{3a}{2a}=-\frac{3}{2}<3$,所以其最小值为$g(3)$.依题设,有

$$g(3)=18a+b=37, \qquad ①$$

$$f(-2)=28a+b=57. \qquad ②$$

联立①,②,解之,得$a=2,b=1$.

14. 解 当$x\leqslant 1-a$时,原式可变为

$$y_1=(x-\frac{1}{2})^2+a^2+a+\frac{7}{4} \qquad ①$$

当$x>1-a$时,原式可变为

$$y_2=(x+\frac{1}{2})^2+a^2+3a-\frac{1}{4}. \qquad ②$$

(i)当$1-a\geqslant\frac{1}{2}$,即$a\leqslant\frac{1}{2}$时,由①得

$$y_{min}=y_{1min}=a^2+a+\frac{7}{4}>3,$$

解之,得$a<-\frac{1+\sqrt{6}}{2}$.

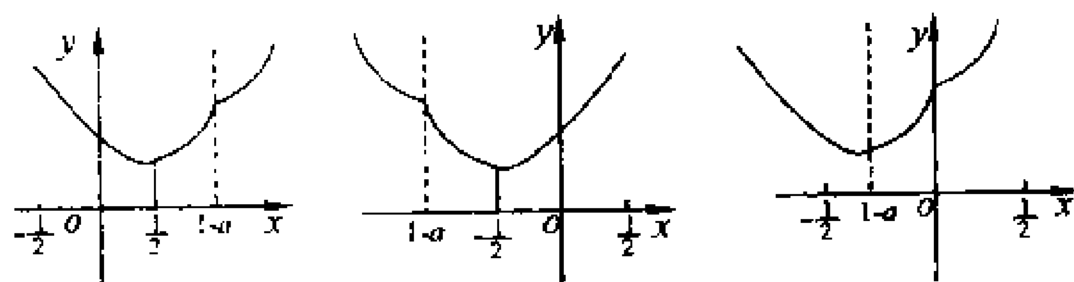
(ii)当$1-a<-\frac{1}{2}$,即$a>\frac{3}{2}$时,由②得

$$y_{min}=y_{2min}=a^2+3a-\frac{1}{4}>3$$

解之,得 $a>\frac{3}{2}$.

(ⅱ)当$\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{3}{2}$时,由①,②可得

$$y_{\min}=y_{1\min}=y_{2\min}=(1-a)^2+(1+a)^2=2a^2+2>3$$



(第14题)

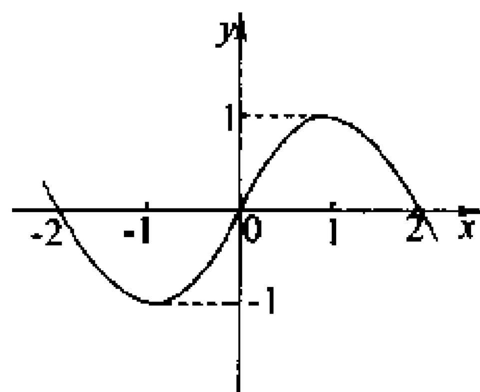
解得 $a<-\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$.

综合(ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),a 的取值范围是$(-\infty,-\frac{1+\sqrt{6}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.

15. **解** 依题设,易知

$$f(x)=\begin{cases}2x+x^2 & (x<0),\\ -x^2+2x & (x\geqslant 0).\end{cases}$$

如图所示,由$\begin{cases}a<b,\\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b},\end{cases}$知 a,b 同号,分情况讨论.



(第15题)

(ⅰ)当$-2\leqslant a<b<-1$时,

$$\begin{cases}2a+a^2=\frac{1}{a},\\ 2b+b^2=\frac{1}{b},\end{cases}$$

解之,得 $a=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$,$b=-1$.

(ⅱ)当$1\leqslant a<b<2$时,

$$\begin{cases}2a-a^2=\frac{1}{a},\\ 2b-b^2=\frac{1}{b},\end{cases}$$

解之,得　$a=1,b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(3)当$0<a\leqslant b\leqslant 1$时,

$$\begin{cases} 2a-a^2=\frac{1}{b}, \\ 2b-b^2=\frac{1}{a}, \end{cases}$$

此方程无解.

类似地,当$-1\leqslant a<b<0$时也无解.

易见当$0<a\leqslant 1\leqslant b<2,-2\leqslant a\leqslant -1<b<0$时也无解.

综上所述,$a=1,b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,或$a=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},b=-1$.

练习七

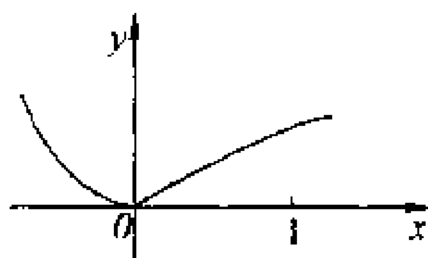
一、选择题

1. **解**　$a^{1996}<a^{1994}$,即$a^{1994}(a-1)<0$.其中$a^{1994}>0$,故$a<1$;$a^{1994}<a^{1996}$,即$a^{1994}(1-a^2)<0$.其中$a^{1994}>0$,故$a<-1$或$a>1$.由上述知　$a<-1$,选(B).

2. **解**　$f(-x)+f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}+\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg(\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1-x}{1+x})=\lg 1=0$.故$f(x)$为奇函数.显见$f(x)$是减函数,故选(B).

3. 选(D)

4. **解**　显然$x\neq 1$.当$x>0$且$x\neq 1$时,方程左边$=\frac{\lg x}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 3}{\lg x}=\log_5 3=$方程右边.选(D).



(第6题)

5. **解**　由$1<a<b<a^2$可知$\log_a b,\log_b a,\log_{ab}a^2\in \mathrm{R}^+$,$1=\log_a a<\log_a b<\log_a a^2=2$,$\log_b a<\log_b b=1$,$\log_{ab}a^2<\log_{ab}a^b=1$,而$\log_b a-\log_{ab}a^2=\log_b a-2\log_{ab}a=\frac{1}{\log_a b}-\frac{2}{\log_a b+1}=\frac{1-\log_a b}{\log_a b(\log_a b+1)}<0$,故2最大,$\log_b a$最小.选(A).

6. **解**　如图,在区间$(-\infty,0]$上,$f(x)$递减,在区间$(0,+\infty)$上,$f(x)$递增.依题设$-1<a<b<c$及$f(a)>f(c)>f(b)$可知a,b,c不在同一个单调区间上,即必有$a<0,c>$

0,因而定有 $ac<0$.选(A).

二、填空题

7. **解** $(g(x))^2-(f(x))^2$

$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2-(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2$$

$$=(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2})(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2})$$

$$=e^x\cdot e^{-x}=e^0=1.$$

8. **解** 因 $2^x\cdot3^y=648=2^3\cdot3^4$, $3^x\cdot2^y=432=2^4\cdot3^3$,所以 $2^{x+y}\cdot3^{x+y}=6^{x+y}=6^7$,有

$$x+y=7 \qquad ①$$

另一方面,有 $\frac{2^{x-y}}{3^{x-y}}=\frac{2}{3}$, $(\frac{2}{3})^{x-y}=(\frac{2}{3})^{-1}$,所以

$$y-x=1. \qquad ②$$

由①,②知 $(x,y)=(3,4)$.

9. **解** 依题设,不等式 $f(a^2)>\varphi(a^a)$ 可变为 $a^{a^2}>(a^a)^2$,即

$$a^{a^2}>a^{2a}. \qquad ①$$

当 $0<a<1$ 时,①式变为 $a^2<2a$,解得 $a<2$,故 $0<a<1$.

当 $a>1$ 时,①式变为 $a^2>2a$,解得 $a>2$.

因此 a 的取值范围是 $(0,1)\cup(2,+\infty)$.

10. **解** 因 $0<0.9^{1.1}<1<1.1^{0.9}<1.1<2$,所以 $2<4-1.1^{0.9}<4-0.9^{1.1}<8$,从而 $f(4-0.9^{1.1})>f(4-1.1^{0.9})$ 即 $a<b$,又 $c=f(-4)=f(8)$,有 $c>b$,故 $a<b<c$.

11. **解** 原方程等价于 $\begin{cases}x+3>0,\\ x^2>0,\\ (x+3)^2=4^a\cdot x^2.\end{cases}$ ①

由①得 $x_1=\frac{3}{2^a-1}$, $x_2=-\frac{3}{2^a+1}$,因 $x^2>0$,故欲使原方程解在区间(3,4)内,须且只须

$\begin{cases}3<\frac{3}{2^a-1}<4\\ -\frac{3}{2^a+1}\leqslant-3.\end{cases}$ 解之,知满足要求的 a 不存在.

12. **解** 原方程等价于

$$(\frac{1}{2})^x+(\frac{2}{3})^x+(\frac{5}{6})^x=1$$

因指数函数$(\frac{1}{2})^x,(\frac{2}{3})^x,(\frac{5}{6})^x$都是减函数,故函数$y=(\frac{1}{2})^x+(\frac{2}{3})^x+(\frac{5}{6})^x-1$是减函数,所以原方程只有一个根3.

三.解答题

13. **解** 令$\frac{b}{a}=c$,则$f(x)=\frac{a+bc^x}{1+c^x}$,设$x_1<x_2$,有

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{a+b\cdot c^{x_2}}{1+c^{x_2}}-\frac{a+bc^{x_1}}{1+c^{x_1}}=\frac{a(1-c)(c^{x_1}-c^{x_2})}{(1+c^{x_1})(1+c^{x_2})}.$$

因$c>1$时,$c^{x_2}>c^{x_1}$;$c<1$时,$c^{x_2}<c^{x_1}$,故$(1-c)(c^{x_1}-c^{x_2})>0$,于是$f(x_2)-f(x_1)>0$即$f(x_2)>f(x_1)$,$f(x)$是增函数.

14. **解** $f(\frac{a+b}{1+ab})=\lg\frac{1+\frac{a+b}{1+ab}}{1-\frac{a+b}{1+ab}}=\lg\frac{(a+1)(b+1)}{(a-1)(b-1)}=1$,故$(a+1)(b+1)=10(a-1)(b-1)$,同理$(a+1)(b-1)=100(a-1)(b+1)$.两式相除得$(\frac{1+b}{1-b})^2=\frac{1}{10}$,因$|b|<1$,故$\frac{1+b}{1-b}=\frac{1}{\sqrt{10}}$,$f(b)=-\frac{1}{2}$.类似地可得$f(a)=\frac{3}{2}$.

15. **解** 因(x,y),$(\frac{x}{3},\frac{y}{2})$分别在函数$f(x)$,$g(x)$的图象上,故有

$$g(\frac{x}{3})=\frac{y}{2}=\frac{1}{2}\log_2(x+1),$$

以x代替$\frac{x}{3}$,有

$$g(x)=\frac{1}{2}\log_2(3x+1).$$

从而

$$\begin{aligned}p(x)=g(x)-f(x)&=\frac{1}{2}\log_2(3x+1)-\log_2(x+1)\\&=\frac{1}{2}\log_2\frac{3x+1}{(x+1)^2}\\&=\frac{1}{2}\log_2[\frac{3}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}]\\&=\frac{1}{2}\log_2[-2(\frac{1}{x+1}-\frac{3}{4})^2+\frac{9}{8}]\leqslant\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{8}\end{aligned}$$

当$\frac{1}{x+1}=\frac{3}{4}$,即$x=\frac{1}{3}$时,$p(x)_{max}=\frac{1}{2}\log_2\frac{9}{8}$.

16. **解** 因$x>2$,故$x-1>1$,从而

$$\log_{\frac{2}{3}}(x-1)<0,$$

从而 A 为 $(-\infty,0)$. 因 $B\subseteq A$,故 $z<0$,也就是

$$\frac{m^2x-1}{mx+1}<0,$$

即
$$(m^2x-1)(mx+1)<0 \qquad ①$$

易知 $m=0$ 时①式成立,当 $m\neq 0$ 时,令

$$\begin{aligned} f(x)&=(m^2x-1)(mx+1)\\ &=m^3x^2+(m^2-m)x-1, \end{aligned}$$

要使 $x>2$ 时,$f(x)<0$,须且只须

$$\begin{cases} m^3<0, \\ f(2)<0, \\ -\dfrac{m^2-m}{2m^3}\leqslant 2, \\ \Delta=(m^2-m)^2+4m^3\geqslant 0; \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} m^3<0, \\ \Delta=(m^2-m)^2+4m^3<0. \end{cases}$$

解之,得 $m\in\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{17}}{8}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 即为所求.

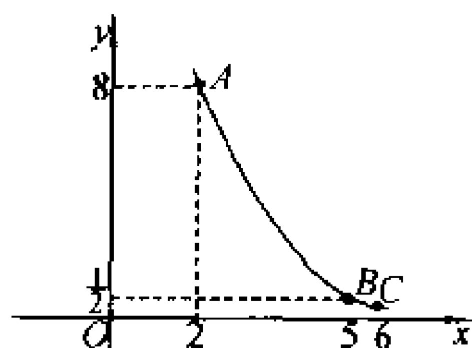
17. **解** (1)易知 $x\in(2,6)$, $y\neq\frac{1}{2}$. 原方程可变为

$$\lg(6-x)=\frac{1}{2}\lg 2y,$$

由此得
$$y=\frac{1}{2}(x-6)^2.$$

注意到 $y\neq\frac{1}{2}$,故函数

$$y=f(x)=\frac{1}{2}(x-6)^2 \qquad x\in(2,5)\cup(5,6),$$



(第 17 题)

其图象是抛物线的一部分. 如图所示,当直线 $y=ax+\frac{1}{2}$ 经过点 $A(2,8)$ 时 $a=\frac{15}{4}$, 当直线 $y=ax+\frac{1}{2}$ 经过点 $B(5,\frac{1}{2})$ 时, $a=0$, 故 $0<a<\frac{15}{4}$ 时与上述抛物线的 AB 弧恰有一个公共点.

同理,当 $-\frac{1}{12}\leqslant a<0$ 时,直线 $y=ax+\frac{1}{2}$ 与 $f(x)$ 的图象也恰有一个公共点.

此外,直线 $y=ax+\frac{1}{2}$ 与上述抛物线 BC 弧有一切点,其横坐标为 $\sqrt{35}$,此时 $a=\sqrt{35}$

-6.

综上所述,a 的取值范围为$[-\frac{1}{12},0)\cup(0,\frac{15}{4})\cup\{\sqrt{35}-6\}$.

练习八

一、填空题

1. **解** 由 $x-1<[x]\leqslant x$,及$[x]=\frac{31-5x}{2}$知

$$\begin{cases}\frac{31-5x}{2}\leqslant x,\\ \frac{31-5x}{2}>x-1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\geqslant\frac{31}{7},\\ x>\frac{33}{7}.\end{cases}$$

故$[x]=4$,代入原方程有 $5x+8-31=0$,得 $x=\frac{23}{5}$.

2. **解** 因$[x]\leqslant x<[x]+1$,又$[x]<0$不是解,故

$$\begin{cases}4([x]+1)^2-40[x]+51>0,\\ 4[x]^2-40[x]+51\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2[x]-5)(2[x]-11)>0,\\ (2[x]-3)(2[x]-17)\leqslant 0.\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}[x]>\frac{5}{2},\\ [x]\geqslant\frac{3}{2},\\ [x]\leqslant\frac{17}{2}\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}[x]>\frac{11}{2},\\ [x]\geqslant\frac{3}{2},\\ [x]\leqslant\frac{17}{2}.\end{cases}$$

解得$[x]=2$,或$[x]=6$或7或8.分别代入方程得

$$4x^2-29=0,\qquad x=\frac{\sqrt{29}}{2};$$

$$4x^2-189=0,\qquad x=\frac{\sqrt{189}}{2};$$

$$4x^2-229=0,\qquad x=\frac{\sqrt{229}}{2};$$

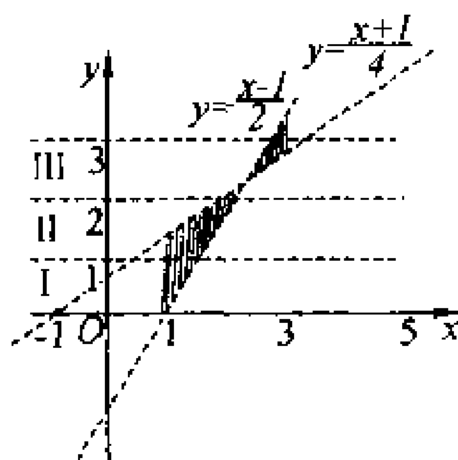
$$4x^2-269=0,\qquad x=\frac{\sqrt{269}}{2}.$$

经检验知,这四个值都是原方程的解.

3. **解** 若 $x\leqslant -1$,则 $3x^3-[x]\leqslant 3x-x+1<0$;若$-1<x<0$,则 $3x^3-[x]=3x^3+1\leqslant$

I;若 $x\geqslant 2$,则 $3x^3-[x]\geqslant 3x^3-x>3x-x=2x\geqslant 4$;若 $0\leqslant x<1$,则 $3x^3-[x]=3x^3<3$,若 $1\leqslant x<2$ 时,$3x^3-[x]=3x^3-1$,原方程即为 $3x^3-1=3$.所以,方程的解为 $x=\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$.

4. **解** 根据函数$[x]$的性质,有 $-1<\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{2}<1$,即 $-1<x<7$,令 $y_1=\frac{x+1}{4}$,$y_2=\frac{x-1}{2}$,在同一坐标系中作出二者的图象(如图所示).



(第4题)

在I区内,当 $-1<x<1$ 时,不适合原方程,令 $y_2=0$,得 $x=1$,故 $1\leqslant x<3$ 为所求.

在II区内,令 $y_2=2$,得 $x=5$,故 $3\leqslant x<5$ 为所求.

综上所述,原方程的解集为$[1,5)$.

5. **解** 易知若 $n_1>n_2$,有

$$\sqrt{n_1+\sqrt{n_1+\sqrt{n_1}}}>\sqrt{n_2+\sqrt{n_2+\sqrt{n_2}}},$$

$$[\sqrt{n_1+\sqrt{n_1+\sqrt{n_1}}}]\geqslant[\sqrt{n_2+\sqrt{n_2+\sqrt{n_2}}}].$$

所以只要求出使之成立的最小数 n_0,最大数 M,则$[n_0,M]$中的整数为所求.

先求使$\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}\geqslant 2$ 成立的最小 n_0. 显然 $n_0>2$, 又因 $3+\sqrt{3}>4$, 知 $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}>2$,知 $n_0=3$;又 $7+\sqrt{7}>9$,$7+\sqrt{7+\sqrt{7}}>10$,$\sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7}}}>3$,故 $M<7$.

下面证明 $M=6$,也就是证明$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}<3$.用反证法.若$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\geqslant 3$,则 $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}\geqslant 9$,$6+\sqrt{6}\geqslant 9$,$\sqrt{6}\geqslant 3$,这是不成立的,故$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}<3$.

综上所述,知使$[\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}]=2$的自然数 n 的集合是$\{3,4,5,6\}$.

二、解答题

6. **证明** $x=[x]+\{x\}$,$y=[y]+\{y\}$.

$$\begin{aligned}[2x]+[2y]&=[2[x]+2\{x\}]+[2[y]+2\{y\}]\\&=2[x]+2[y]+[2\{x\}]+[2\{y\}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[x]+[x+y]+[y]&=[x]+[x]+[y]+[\{x\}+\{y\}]+[y]\\&=2[x]+2[y]+[\{x\}+\{y\}]\end{aligned}$$

只需比较$[2\{x\}]+[2\{y\}]$与$[\{x\}+\{y\}]$的大小.

(i)若 $0\leqslant\{x\}<\frac{1}{2}$,$0\leqslant\{y\}<\frac{1}{2}$,则

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]=[\{x\}+\{y\}]=0,$$

(ii)若$\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1,0\leqslant\{y\}<\frac{1}{2}$,则

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]=1,[\{x\}+\{y\}]\leqslant 1,$$

知
$$[2\{x\}]+[2\{y\}]\geqslant[\{x\}+\{y\}],$$

(iii)若$0\leqslant\{f\}<\frac{1}{2},\frac{1}{2}\leqslant\{y\}<1$,同理可证

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]\geqslant[\{x\}+\{y\}];$$

(iv)若$\frac{1}{2}\leqslant\{x\}<1,\frac{1}{2}\leqslant\{y\}<1$则

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]=2,[\{x\}+\{y\}]=1$$

知
$$[2\{x\}]+[2\{y\}]>[\{x\}+\{y\}].$$

综上可知,总有

$$[2\{x\}]+[2\{y\}]\geqslant[\{x\}+\{y\}].$$

故对任意实 x,y,总有

$$[2x]+[2y]\geqslant[x]+[x+y]+[y].$$

7. **解** 对固定的 $k\in\mathbf{N}$,

$$[\sqrt[3]{m}]=k$$
$$\Leftrightarrow k^3\leqslant m\leqslant(k+1)^3-1\quad(m\in\mathbf{N}).\qquad ①$$

满足①的正整数个数为

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

因此原方程的左端等于$\sum_{k=1}^{x-1}S_k$,其中

$$S_k=k(3k^2+3k+1).$$

因 $k\in\mathbf{N}$ 时,$S_k>0,S_1=7,S_2=38,S_3=111,S_4=244$,且

$$S_1+S_2+S_3+S_4=400.$$

故原方程有惟一正整数解 $x=5$.

8. **证明** 首先,因为对任意 $n\in\mathbf{N}$,$4n(n+1)<(2n+1)^2$,所以 $2\sqrt{n(n+1)}<2n+1$.
因此

$$(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}<4n+2.$$

于是
$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<\sqrt{4n+2},$$

从而
$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]\leqslant[\sqrt{4n+2}].$$

其次，设对某个 $n\in \mathrm{N}$，有

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]<[\sqrt{4n+2}],$$

则存在 $m\in \mathrm{N}$，使得

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+1}<m\leqslant\sqrt{4n+2}.$$

因此

$$2\sqrt{n(n+1)}<m^2-(2n+1)\leqslant 2n+1,$$

即
$$4n(n+1)<[m^2-(2n+1)]^2\leqslant 4n(n+1)+1.$$

因为 $[m^2-(2n+1)]^2$ 是自然数，所以 $m^2-(2n+1)=2n+1$，因此 $m^2=2(2n+1)$ 被 2 整除，但不被 4 整除，不可能．于是，对任意 $n\in \mathrm{N}$，命题成立．

9．**证明**　当 $n\geqslant 3$ 时有 $\frac{n+1}{4}<\frac{n(n+1)}{4n-2}<\frac{n+2}{4}$，再设 $n+1=4q+r(0\leqslant r\leqslant 3,q\in N)$，则有 $q+\frac{r}{4}<\frac{n(n+1)}{4n-2}<q+\frac{r+1}{4}$．从而 $\frac{r}{4}<\{\frac{n(n+1)}{4n-2}\}<\frac{r+1}{4}$．而 $\frac{n+1}{4}=q+\frac{r}{4}$，那么 $\{\frac{n+1}{4}\}=\frac{r}{4}$，因此 $\{\frac{n(n+1)}{4n-2}\}>\{\frac{n+1}{4}\}$．

10．**解**　当 $x\neq 1$ 时，原方程等价于 $|x-1|(|x+1|-1)=\{x\}$．分别考虑下列三种情形：(i) 当 $x>1$ 时，方程可写为 $x(x-1)=\{x\}$．因为 $x(x-1)>x-1\geqslant\{x\}$，所以方程无解；(ii) 当 $-1\leqslant x<1$ 时，方程可改写为 $x(1-x)=\{x\}$．因为 $\{x\}\geqslant 0$ 与 $1-x>0$，所以 $x\geqslant 0$，但当 $0\leqslant x<1$ 时，$\{x\}=x$，因此得到 $x(1-x)=x$．于是方程有一个解 $x=0$，(iii) 当 $x<-1$ 时，方程可写为 $(2+x)(x-1)=\{x\}$．因为 $x-1<0$，且 $\{x\}\geqslant 0$，所以 $2+x\leqslant 0$，即 $x\leqslant -2$．显然 $x=-2$ 是方程的解．如果 $-3\leqslant x<-2$，则 $\{x\}=x+3$，而方程又可写为 $(2+x)(x-1)=3+x$，且有解 $x=-\sqrt{5}\in[-3,-2)$．最后，当 $x<-3$ 时，有

$$|(2+x)(1-x)|=|2+x|\cdot|1-x|>4>\{x\},$$

即方程无解．因此，原方程有三个解：$0,-2,-\sqrt{5}$．

11．**解**　设 $x=m+\alpha,\frac{1}{x}=n+\beta(m,n\in \mathrm{Z},0\leqslant\alpha,\beta<1)$ 若 $\{x\}+\{\frac{1}{x}\}=\alpha+\beta=1$，则 $x+\frac{1}{x}=m+\alpha+n+\beta=m+n+1$ 是整数．令 $x+\frac{1}{x}=k(k$ 为整数)，即 $x^2+kx+1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}(k\pm\sqrt{k^2-4})$．

当 $|k|=2$ 时，$|x|=1$ 易验证它不满足所设等式．

当 $|k|\geqslant 3$ 时，$x=\frac{1}{2}(k+\sqrt{k^2-4})$ 是满足等式的全体实数．

k^2-4 不是完全平方数．事实上，若 $k^2-4=h^2$，则 $k^2-h^2=4$，但当 $|k|\geqslant 3$ 时，两个平方之差不小于 5，矛盾．所以，x 是无理数即满足题设等式的 x 都不是有理数．

12. **解** 令 $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$,有 $f(x+n)=f(x)+20n$,对任一正整数 n 成立.将 1—1000 分为 50 段,每 20 个为 1 段.当 x 在 $(0,1]$ 中变化时,$f(x)$ 值在 $x=\frac{1}{8}$,$\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8}$ 及 1 处改变,所以 $f(x)$ 在 1 ~ 20 中取 12 个不同的正整数值.因此,每段中,$f(x)$ 在 1 ~ 20 中取 12 个不同的正整数值.因此,每段中,$f(x)$ 可取 12 个值.在前 1000 个正整数中总共可取到 $50\times 12=600$ 个不同的整数值.

13. **证明** 设 $f(x)=[x]+[2x]+[4x]+[8x]+[16x]+[32x]$.

假设方程有一个实数解 x.则

$$f(x)=12345.$$

又因为

$$f(195)=12285<12345.$$

$$f(196)=12348>12345.$$

且 $f(x)$ 是不减的,于是有

$$195<x<196.$$

设 $y=x-195$,则 $0<y<1$,有

$$\begin{aligned}f(y)&=[x-195]+[2x-2\cdot 195]+\cdots+[32x-32\cdot 195]\\&=f(x)-f(195)\\&=12345-12285\\&=60.\end{aligned}$$

由于 $0<y<1$,则对一切正整数 n,$0<ny<n$.从而 $[ny]\leqslant n-1$.因而又有

$$\begin{aligned}f(x)&=[y]+[2y]+[4y]+[8y]+[16y]+[32y]\\&\leqslant 0+1+3+7+15+31\\&=57<60.\end{aligned}$$

矛盾.因此原方程没有实数解.

练习九

一、选择题

1. **解** $T=\frac{2\pi}{|-3|}=\frac{2\pi}{3}$.故选(B).

2. **解** $\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\-1\leqslant 2x+1\leqslant 1,\\x\geqslant 2x+1,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1,\\-1\leqslant x\leqslant 0,\\x\leqslant -1.\end{cases}$

解得　$x=-1$.故选(D).

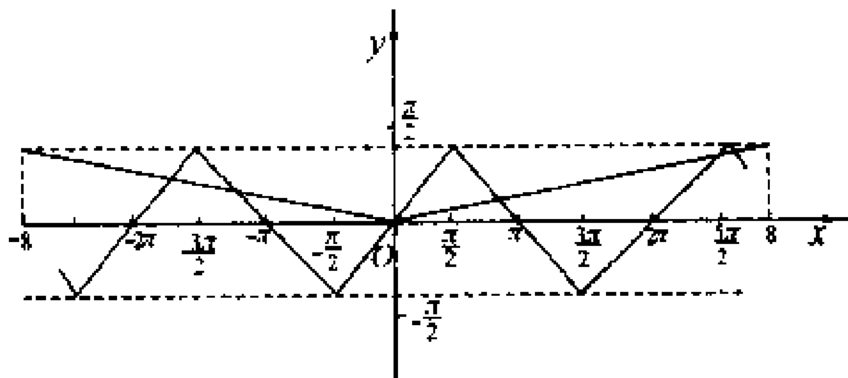
3. **解**　$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\xrightarrow{\text{各点向右平移}\frac{\pi}{8}} y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin 2x$.

$\xrightarrow{\text{各点的横坐标缩短为原来的}\frac{1}{2}} y=\sin 2(2x)=\sin 4x$.故选(C).

4. **解**　由$0<x<y<\frac{\pi}{2}$,知$\cos x>\cos y$.即$\frac{\cos y}{\cos x}<1$,所以$a=\frac{\tan x}{\tan y}=\frac{\sin x\cos y}{\sin y\cos x}<\frac{\sin x}{\sin y}=b<1$,而$\sec(x-y)>1$,故$a<b<c$.选(A).

5. **解**　对于$\arcsin(\sin x)$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,对于$\frac{\pi}{16}|x|$,定义域为$R$,与$y=\frac{\pi}{2}$交于点$\left(8,\frac{\pi}{2}\right)$及$\left(-8,\frac{\pi}{2}\right)$.

如图所示,当$x\geqslant 0$时,函数$y=\arcsin(\sin x)$与$y=\frac{\pi}{16}x$的曲线有4个交点;当$x<0$时,二曲线仅有2个交点,共计有6个交点.选(B).



(第5题)

6. **解**　因$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,故$1-\sin^2\alpha<1$,有$1-\sin\alpha<\frac{1}{1+\sin\alpha}<1$.因$\frac{|\log_{\tan\alpha}(1-\sin\alpha)|}{|\log_{\tan\alpha}(1+\sin\alpha)|}=|\log_{(1+\sin\alpha)}(1-\sin\alpha)|$.且$\log_{(1+\sin\alpha)}(1-\sin\alpha)<\log_{(1+\sin\alpha)}\frac{1}{1+\sin\alpha}=-1<0$.所以$|\log_{(1+\sin\alpha)}(1-\sin\alpha)|>1$.故选(A).

二、填空题

7. **解**　依题设$y=\sin(2x+\varphi)$在$x=\frac{\pi}{8}$时取最大值或最小值.又$\varphi\in(0,\pi)$,故$2\times\frac{\pi}{8}+\varphi=\frac{\pi}{2}$.解得$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

8. **解**　依题设y的最大值为2.故$A=2$.又$x=\frac{\pi}{12}$时y取最大值,$x=-\frac{5}{12}\pi$时y

取最小值.故$\frac{\pi}{12}-(-\frac{5}{12}\pi)=\frac{2\pi}{|\omega|}\cdot\frac{1}{2}$,解得 $\omega=2$(因 $\omega>0$).设$\frac{\pi}{12}\cdot2+\varphi=2m\pi+\frac{\pi}{2}$,$-\frac{5}{12}\pi\cdot2+\varphi=2n\pi+\frac{3\pi}{2}(m,n\in Z)$.两式相减即得 $m-n=1$,知 $\varphi=2m\pi+\frac{\pi}{3}$.故所求解析式为 $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.

9. **解** 令 $p=\frac{22}{7}$.依题设,有

$$\sec x+\tan x=p, \quad ①$$

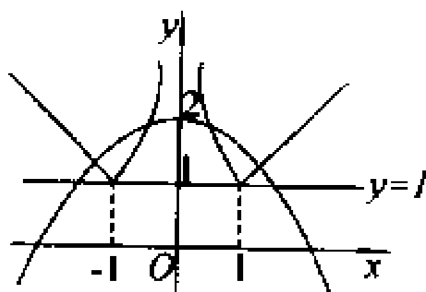
$$\sec x-\tan x=\frac{1}{p} \quad ②$$

①+②得
$$\sec x=\frac{1}{2}(p+\frac{1}{p}) \quad ③$$

①-②得
$$\tan x=\frac{1}{2}(p-\frac{1}{p}) \quad ④$$

于是 $\cos x=\frac{2p}{p^2+1}$,$\sin x=\frac{p^2-1}{p^2+1}$.故 $\csc x+\cot x=\frac{p+1}{p-1}=\frac{29}{15}$.
有 $m+n=29+15=44$.

10. **解** 设 $y_1=10^{|\lg|x||}$,$y_2=2\cos x$.



(第10题)

当 $x\geqslant1$ 时,$y_1=x$;当 $0<x<1$ 时,$y_1=\frac{1}{x}$.因 $2\cos1>2\cos\frac{\pi}{3}=1$,故 $x>0$ 时,y_1,y_2 有两个交点.又 y_1,y_2 均为偶函数,所以 y_1,y_2 的图象有4个交点.如图所示,即方程有4个实根.

11. **解** 当 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 时,$0<\sin\theta<\cos\theta<1$,因而函数 $y=x^{\sin\theta}$是 R_+上的增函数,有 $\sin\theta^{\sin\theta}<\cos\theta^{\sin\theta}<1$.而函数 $y=(\sin\theta)^x$ 与 $y=(\cos\theta)^x$ 是减函数,又有 $0<\sin\theta^{\cos\theta}<\sin\theta^{\cos\theta}$.同理

$$\sin\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}<\cos\theta^{\cos\theta^{\sin\theta}}<\cos\theta^{\sin\theta^{\sin\theta}}<\cos\theta^{\sin\theta^{\cos\theta}},$$

故最大的是C.

12. **解** 设 $y=\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2=-\sin^2\theta+2m\sin\theta-2m-1$.令 $x=\sin\theta$,$x\in[0,1]$.$y=-x^2+2mx-2m-1=-(x-m)^2+m^2-2m-1$.

要使在所给范围内恒有 $y<0$,只需 y 的最大值在所给范围内小于0,分三种情况:

(1)$m\leqslant0$,$y_{max}=-m^2+m^2-2m-1=-2m-1$,欲$-2m-1<0$,即 $m>-\frac{1}{2}$.有$-\frac{1}{2}$

$< m \leqslant 0$.

(ii) $0 < m < 1, y_{max} = m^2 - 2m - 1$. 欲使 $m^2 - 2m - 1 < 0$，即 $1 - \sqrt{2} < m < 1 + \sqrt{2}$. 于是 $0 < m < 1$.

(iii) $m \geqslant 1, y_{max} = -2$.

综上所述，m 的范围为 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

三、解答题

13. **证明** 首先，函数 $f(x)$ 的定义为 $|x| \leqslant 1$. 其次，有 $f(-x) = \arccos(-x) - \frac{\pi}{2} = \pi - \arccos x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arccos x = -f(x)$.

所以，函数 $f(x)$ 是奇函数.

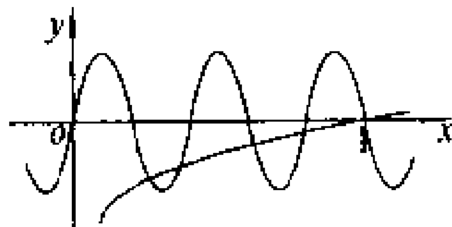
14. **证** 当 $x \in (0, \pi]$ 时，不等式显然成立. 当 $x \in [\frac{3\pi}{2}, +\infty)$ 时，$x^2 + \pi x + \frac{15}{2}\pi \sin x \geqslant \frac{3\pi}{2}(\frac{3\pi}{2} + \pi) - \frac{15}{2}\pi = \frac{15}{2}\pi(\frac{\pi}{2} - 1) > 0$. 当 $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ 时 $x^2 + \pi x - \frac{15}{2}\pi \sin(x - \pi) \geqslant x^2 + \pi x - \frac{15}{2}\pi(x - \pi) = (x - \frac{3\pi}{2})(x - 5\pi) > 0$.

15. **解** n 为奇数时，$\cos x \geqslant 0, \sin x \leqslant 0$. 当 $\sin x = 0$ 时，$\cos x = 1, x = 2k_1\pi (k_1 \in Z)$，当 $\sin x = -1$ 时，$\cos x = 0, x = 2k_2\pi - \frac{\pi}{2} (k_2 \in Z)$. 若 $-1 < \sin x < 0$，则原方程可化为 $|\cos x|^n + |\sin x|^n = 1$ ①，且 $n \geqslant 3$ 时，$|\cos x|^n < \cos^2 x, |\sin x|^n < \sin^2 x$，故 $|\cos x|^n + |\sin x|^n < 1$，方程①无解. 于是考察 $n = 1$ 时情形：$\cos x - \sin x = 1$. 解之，得 $\sin x = 0$ 或 -1. 故所求方程解为 $\{x \mid x = 2k\pi$ 或 $2k\pi - \frac{\pi}{2} (k \in Z)\}$.

16. **解** 设 $\sin x^2$ 是周期函数，必存在正周期 p，有 $\sin(x + p)^2 = \sin x^2$，取 $x = 0$，知 $p^2 = q\pi, q \in N$. 那么有 $x = 0, \sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}, \cdots, \sqrt{q\pi}$ 均使 $\sin x^2 = 0$，且仅有上述的 $q + 1$ 个值包含在 0 与 p 之间使 $\sin x^2 = 0$，但有 $(4q + 1) - q = 3q + 1$ 个值包括在 p 与 $2p$ 之间，即 $\sqrt{q\pi}, \sqrt{(q+1)\pi}, \cdots, \sqrt{4q\pi} = 2\sqrt{q\pi}$，使 $\sin x^2 = 0$，这与周期函数的性质不符.

17. **解** 原方程可改写为方程组

$$\begin{cases} y = \frac{1}{5}\log_2 x, \\ y = \sin(5\pi x) \end{cases}$$



问题等价于确定函数 $y=\frac{1}{5}\log_2 x$ 与函数 $y=\sin(5\pi x)$图象交点的个数.

如图所示,因为对任意实数 x 均有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以只需要考虑那些使

$$\left|\frac{1}{5}\log_2 x\right|\leqslant 1 \qquad ①$$

的 x 的值.

由①知 $\frac{1}{32}\leqslant x\leqslant 32$.

(i)当$\frac{1}{32}\leqslant x<1$时,$-1\leqslant\frac{1}{5}\log_2 x<0$,$\sin(5\pi x)\leqslant 0$.即$\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$,$\frac{3}{5}\leqslant x\leqslant\frac{4}{5}$.此时 $y=\frac{1}{5}\log_2 x$ 的图象与 $y=\sin 5\pi x$ 的图象有4个交点.

(ii)当$1<x\leqslant 32$时,$0<\frac{1}{5}\log_2\leqslant 1$.且

$$\sin 5\pi x>0 \qquad ②$$

而 $x\in(\frac{2k}{5},\frac{2k+1}{5})k=3,4,\cdots,79$时满足②.当 $k=3,4,\cdots,79$时,两图象相交于 $2\times 77=154$ 个点.

(iii)当 $x=1$ 时,两图象也相交于一点.

综上所述,函数 $y=\frac{1}{5}\log_2 x$ 与函数 $y=\sin 5\pi x$ 的图象交于 $154+4+1=159$ 个交点,即原方程有159个实数解.

练习十

一、选择题

1. **解** 因 $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})$,故$-2\leqslant\frac{4m-6}{4-m}\leqslant 2$.解得$-1\leqslant m\leqslant\frac{7}{3}$.选(C).

2. **解** α 在第二象限,有 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\frac{9}{25}}=-\frac{4}{5}$,$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$,$\tan\beta=\frac{1}{2}$,于是

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1+(-\frac{3}{4})\frac{1}{2}}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{5}{8}}=-2$$

选(B).

3. **解** $(\sin\theta+1)(25\sin\theta-24)=0$,故 $\sin\theta=-1$ 或 $\sin\theta=\frac{24}{25}$.因 θ 在第二象限,所以

$\sin\theta=\frac{24}{25}$,$\cos\theta=-\frac{7}{25}$.又$\frac{\theta}{2}$ 在第一、三象限,于是$\frac{\cos\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$.

选(B).

4. **解** 依题设,有$\frac{\sin B}{\cos B}\cdot\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}$,可得$\sin C\cdot\cos C=\sin B\cos B$,即$\sin 2C=\sin 2B$,所以$2C=2B$,$C=B$或$2C+2B=\pi$,$C+B=\frac{\pi}{2}$,$\triangle ABC$为等腰或直角三角形.选(D).

二、填空题

5. **解** 因$\sin x+\cos x=k$,所以$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{k}{\sqrt{2}}$,又$0\leqslant x\leqslant\pi$,所以$\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$.要使$\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{k}{\sqrt{2}}$,在$[0,\pi]$上有两个不等实根,则有$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\sin(x+\frac{\pi}{4})<1$,即$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}k<1$,所以$1\leqslant k<\sqrt{2}$.

6. **解**

$$\begin{aligned}\sec 50^\circ+\cot 80^\circ&=\frac{1}{\sin 40^\circ}+\frac{\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\\&=\frac{2\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\\&=\frac{\cos 40^\circ+\cos 40^\circ+\cos 80^\circ}{\sin 80^\circ}\\&=\frac{\cos 40^\circ+2\cos 60^\circ\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}\\&=\frac{\cos 40^\circ+\cos 20^\circ}{\sin 80^\circ}\\&=\frac{2\cos 30^\circ\cos 10^\circ}{\sin 80^\circ}=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

将$\cos 40^\circ$变为$\cos(120^\circ-80^\circ)$,则

$$\begin{aligned}2\cos 40^\circ+\cos 80^\circ&=2\cos(120^\circ-80^\circ)+\cos 80^\circ\\&=2(\cos 120^\circ\cos 80^\circ+\sin 120^\circ\sin 80^\circ)+\cos 80^\circ\\&=\sqrt{3}\sin 80^\circ\end{aligned}$$

也可得到所求结果.

7. **解**

$$\begin{aligned}原式=\frac{\sin 20^\circ(1-\sin 10^\circ)}{\cos 20^\circ\sin 10^\circ}&=\frac{2\sin 20^\circ+\cos 30^\circ-\cos 10^\circ}{\sin 30^\circ-\sin 10^\circ}\\&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 20^\circ+(\cos 70^\circ-\cos 10^\circ)}{\frac{1}{2}-\sin 10^\circ}\\&=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{\frac{1}{2}-\sin 10^\circ}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\frac{1}{2} - \sin 10°)}{\frac{1}{2} - \sin 10°}$$

$$= \sqrt{3}.$$

8. **解** 因 α,β 均为锐角，且 $\cos(\alpha+\beta)>0,\cos(2\alpha+\beta)>0$，故 $\alpha+\beta$ 与 $2\alpha+\beta$ 均为锐角。

由 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{12}{13},\cos(2\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，可得 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13},\sin(2\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$.

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos[(2\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)]\\ &= \cos(2\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\sin(2\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{56}{65}.\end{aligned}$$

9. **解** $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C$

$$\begin{aligned}&= \frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C\\ &= 1+\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos^2C+2\cos A\cos B\cos C\\ &= 1-\cos C[\cos(A-B)-\cos C-2\cos A\cos B]\\ &= 1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)-2\cos A\cos B]\\ &= 1-\cos C[2\cos A\cos B-2\cos A\cos B]\\ &= 1.\end{aligned}$$

10. **解** 原方程可变为 $\text{arccot}(xy)=\arctan 3-\arctan x$，进而得

$$\frac{1}{xy}=\frac{3-x}{1+3x},$$

即

$$xy=\frac{1+3x}{3-x}=\frac{10}{3-x}-3.$$

因 x,y 均为正整数，故 $3-x\mid 10$，且 $\frac{10}{3-x}>3$，x 只能是 1 或 2. 当 $x=1$ 时，$y=2$；当 $x=2$ 时，$y=\frac{7}{2}$（不合要求，舍去），故正整数解为 $x=1,y=2$.

11. **解** $\frac{\cos 2\alpha}{\cos(\frac{\pi}{4}+\alpha)}=\frac{\cos[\frac{\pi}{2}-2(\frac{\pi}{4}-\alpha)]}{\cos[\frac{\pi}{2}-(\frac{\pi}{4}-\alpha)]}=\frac{\sin 2(\frac{\pi}{4}-\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4}-\alpha)}=2\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{24}{13}$.

12. **解** $\cos A-\cos B=\frac{1}{2}$ ①，$\sin A-\sin B=-\frac{1}{3}$ ②，①^2＋②^2 得 $2-2\cos(A-B)=\frac{13}{36}$，从而 $\cos(A-B)=\frac{59}{72}$ ③，①×②得 $\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B)-\sin(A+B)=-\frac{1}{6}$，$\sin(A+B)$

$[\cos(A-B)-1]=-\frac{1}{6}$，③代入④得 $\sin(A+B)=\frac{12}{13}$.

也可利用万能公式求解.

三、解答题

13. **解** $\sin6°\cdot\sin42°\cdot\sin66°\cdot\sin78°=\sin6°\cdot\cos12°\cdot\cos24°\cdot\cos48°=\frac{\sin12°}{2\cos6°}\cdot\frac{\sin24°}{2\sin12°}\cdot\frac{\sin48°}{2\sin24°}\cdot\frac{\sin96°}{2\sin48°}=\frac{\sin96°}{2^4\cos6°}=\frac{1}{16}$，

$\cos6°\cdot\cos42°\cdot\cos66°\cdot\cos78°=(\cos6\cdot\cos66°)(\cos42°\cdot\cos78°)=\frac{1}{2}(\cos72°+\cos60°)\cdot\frac{1}{2}(\cos120°+\cos36°)=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\sin18°)(-\frac{1}{2}+\cos36°)=\frac{1}{4}[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\cos36°-\sin18°)+\sin18°\cdot\cos36°]=\frac{1}{4}[-\frac{1}{4}+\frac{\sin72°}{2\cos18°}]=\frac{1}{16}$.

故所求值为 1.

14. **证明**

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1, \quad ①$$

$$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0, \quad ②$$

由①得 $\quad 3\sin^2\alpha=1-2\sin^2\beta=\cos2\beta. \quad ③$

由②得 $\quad 6\sin\alpha\cos\alpha=2\sin2\beta. \quad ④$

因 $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $\sin\alpha,\cos\alpha,\sin2\beta$ 都不为 0. ③÷④得 $\tan\alpha=\cot2\beta$. 即 $\tan\alpha=\tan(\frac{\pi}{2}-2\beta)$. 因 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\beta}<\frac{\pi}{2}$，故 $\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta$，即 $\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$.

也可作如下考虑：因 α,β 都是锐角，$0<\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$，因此，只需证明 $\alpha+2\beta$ 的正弦值为 1 或余弦值为 0，余切值为 0 等. 事实上，由③和④可得

$$\cos(\alpha+2\beta)=\cos\alpha\cos2\beta-\sin\alpha\sin2\beta$$
$$=3\cos\alpha\sin^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0$$

15. **解** 根据万能公式，有 $\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{5}$，$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^2}{1+(\frac{1}{2})^2}=\frac{3}{5}$，故 $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$. 因 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}<\frac{1}{2}$，故 $\frac{5\pi}{6}<\alpha+\beta<\pi$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{12}{13}$. 于是 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha=-\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}$

$+\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=-\frac{16}{65}$.

16. **解** $f(x)=a(1-\cos2x)-\sqrt{3}a\sin2x+a+b=-2a\sin(2x+\frac{\pi}{6})+2a+b$.因 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,故 $2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{6}]$,$\sin(2x+\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$.若 $a>0$,则$\begin{cases}3a+b=1,\\b=-5,\end{cases}$.解得$\begin{cases}a=2,\\b=-5;\end{cases}$若 $a<0$,则$\begin{cases}3a+b=-5,\\b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-2,\\b=1\end{cases}$.

练习十一

一、选择题

1. **解** 根据余弦定理及题设,

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\frac{c^2+a^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2},$$

故 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$,$\frac{\pi}{4}<B+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{7}{12}\pi$.于是,$\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})\in(1,\sqrt{2}]$.故选(A).

2. **解** 依题设,有 $\cos A=\frac{\sin B}{\sin C}$,根据正弦定理$\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{b}{c}$,故 $\cos A=\frac{b}{c}$.又根据余弦定理,有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\frac{b}{c}$,即 $a^2+b^2=c^2$.这是以 c 边为斜边的直角三角形,$C=90°$.依题设及根据韦达定理得 $a+b=2(k+5)$,$ab=3(k+14)$.当 $c=10$ 时 $a^2+b^2=c^2=100$.由上述各式可得 $100=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$,即 $100=4(k+5)^2-6(k+14)$.化简得 $2k^2+17k-42=0$.解得 $k=2$ 或 $-\frac{21}{2}$.当 $k=-\frac{21}{2}$ 时,$a+b=2(k+5)<0$,舍去.故 $k=2$.此时 $a+b+c=24$.故选(B).

3. **解** 根据正弦定理和余弦定理可得:

$$\frac{b}{c}=\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{ca}}$$

即

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}+\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{ab}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}-\frac{b(c^2+a^2-b^2)}{ca}=0.$$

从而可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2}(\frac{1}{b}-\frac{1}{c})+\frac{1}{abc}[c^2(a^2+b^2-c^2)-b^2(c^2+a^2-b^2)]=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2bc}(b^2+c^2-a^2)(c-b)+\frac{1}{abc}(c^2-b^2)(a^2-c^2-b^2)=0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2abc}(b^2+c^2-a^2)(c-b)(a-2b-2c)=0.$$

因 $a<b+c$,有 $a-2b-2c\neq 0$.所以 $b^2+c^2=a^2$ 或 $b=c$,$\triangle ABC$ 为直角三角形或等腰三角形.选(C).

4. **解** 在由 a^2,b^2,c^2 所组成的三角形 $A'B'C'$ 中,因 $a^4=b^4+c^4-b^2c^2$,故 $\frac{b^4+c^4-a^4}{b^2c^2}=1$.从而有 $\cos A'=\frac{b^4+c^4-a^4}{2b^2c^2}=\frac{1}{2}$,可知 $A'=60°$.同理 $B'=60°$.故$\triangle A'B'C'$是正三角形,即 $a^2=b^2=c^2$,进而有 $a=b=c$.所以$\triangle ABC$ 也等边三角形.故选(B).

5. **解** 根据正弦定理可得

$$(b-a)x^2+(a-c)x+(c-b)=0.$$

依题设,有

$$\Delta=(a-c)^2-4(b-a)(c-b)=0.$$

即

$$a^2+4b^2-c^2-4ab+2ac-4bc=0.$$

所以$(a-2b+c)^2=0$,有 $b=\frac{a+c}{2}$.根据余弦定理,有

$$\begin{aligned}\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}&=\frac{a^2+c^2-\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}{2ac}\\&=\frac{3(a^2+c^2)-2ac}{8ac}=\frac{3(a^2+c^2)}{8ac}-\frac{1}{4}\\&\geqslant\frac{3\cdot 2ac}{8ac}-\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

于是$\angle B\leqslant 60°$.当 $a=c$,$\angle A=\angle C$ 时,但 $\sin B\neq\sin C$,所以$\angle B\neq 60°$.取等号.故选(D).

二、填空题

6. **解** 如图,连接 PB,PC,依题设$\angle BAP=\angle CAP=\alpha$.有 $PB=PC$.在$\triangle PAB$ 和$\triangle PAC$ 中,根据余弦定理得

$$PB^2=m^2+AB^2-2mAB\cos\alpha,$$

$$PC^2=m^2+AC^2-2mAC\cos\alpha.$$

(第6题)

于是 AB,AC 是关于 x 的一元二次方程

$$x^2-(2m\cos\alpha)x+(m^2-PB^2)=0$$

的两根.根据韦达定理知 $AB+AC=2m\cos\alpha$.

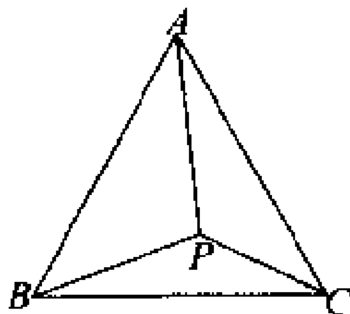
7. **解** 设 $a=n+1,b=n,c=n-1$,由余弦定理可得

$$\cos C=\frac{(n+1)^2+n^2-(n-1)^2}{2(n+1)n}=\frac{n+4}{2(n+1)}.$$

依题设

$$n+1=2(n-1)\cdot\frac{n+4}{2(n+1)}$$

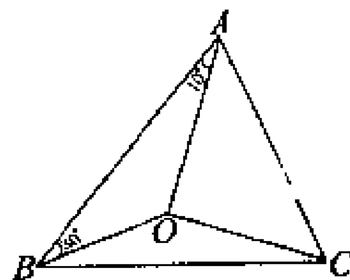
解得 $n=5$.所以 $a=6,b=5,c=4$.根据正弦定理得 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=6:5:4$.



8. **解** 依题设有 $\angle APB=100°$. $\angle BPC=120°$, $\angle CPA=140°$.

因$\triangle ABC$是等边三角形,故$\angle ABP+\angle PBC=60°$,又$\angle BCP+\angle PBC=180°-120°=60°$.所以$\angle ABP=\angle PCB$.根据正弦定理得$\frac{a}{\sin100°}=\frac{PA}{\sin\angle ABP}$,$\frac{a}{\sin120°}=\frac{PB}{\sin\angle PCB}$,所以 $PA\sin100°=PB\sin120°$.即$\frac{PA}{\sin60°}=\frac{PB}{\sin80°}$.

同理可得$\frac{PB}{\sin80°}=\frac{PC}{\sin40°}$.则以 PC、PA、PB 为边的三角形的三个内角是 $40°,60°,80°$(不可能有钝角情形),从小到大排列之比为 2:3:4.



9. **解** 设 $AC=x$,在$\triangle ABC$中,根据余弦定理,有

$$AB^2=x^2+x^2-2x^2\cos80°=2x^2(1-\cos80°)$$

即 $AB=\sqrt{2(1-\cos80°)}x=2x\sin40°$.在$\triangle ABC$中,根据正弦定理得

$$\frac{AO}{\sin30°}=\frac{2x\sin40°}{\sin140°}=2x.$$

所以 $AO=x=AC$.

在$\triangle ABC$中$\angle ACB=80°$,$AC=BC$,可得$\angle CAB=\angle CBA=50°$,则$\angle CAO=50°-10°=40°$,$\angle ACO=\frac{180°-40°}{2}=70°$.

三、解答题

10. **证明** 设$\angle BAX=\angle CAY=\alpha$,$\angle AXY=\beta$,$\angle AYX=\gamma$.根据正弦定理,有$\frac{BX}{AB}=$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \frac{CY}{AC}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.由$\angle BAY=\alpha+\angle XAY$,有$\frac{BY}{AB}=\frac{\sin(\alpha+\angle XAY)}{\sin\gamma}, \frac{CX}{AC}=\frac{\sin(\alpha+\angle XAY)}{\sin\beta}$.所以$\frac{BX\cdot BY}{AB^2}=\frac{CX\cdot CY}{AC^2}$.

即可得所证.

11. **证明** 如图,设$\angle DGP=\alpha$,$\angle FGP=\beta$.在$\triangle PGD$和$\triangle PGF$中$\frac{PD}{PG}=\frac{\sin\alpha}{\sin\angle GDP}$,$\frac{PF}{PG}=\frac{\sin\beta}{\sin\angle GFP}$.

因$\angle GDP \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PB}+\overset{\frown}{AE})$,$\angle GFP \overset{m}{=} \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA}+\overset{\frown}{AE})$,又$P$为$\overset{\frown}{AB}$中点,所以$\angle GDP=\angle GFP$.因$PF=PD$,所以$\sin\alpha=\sin\beta$.又$0°<\alpha+\beta<180°$,所以$\alpha=\beta$.即$\angle PGD=\angle PGF$.

12. **证明** 连结AC,则$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos D$.因四边形$ABCD$内接于圆,故$\angle D+\angle B=180°$,有$\cos D=-\cos B$.注意到AB是直径,$\angle ACB=90°$,$\cos B=\frac{c}{AB}$于是$AB^2=AC^2+BC^2=a^2+b^2-2ab\cos D+c^2=a^2+b^2+c^2+\frac{2abc}{AB}$.令$AB=x$,则$x^3=a^2x+b^2x+c^2x+2abc$.故直径AB是方程$x^3-(a^2+b^2+c^2)x-2abc=0$的根.

13. **证明** 设$AB=c$,$BD=x$,$AD=2$,$DC=1$,$\angle DBC=60°-45°=15°$.在$\triangle BDC$中,根据正弦定理,有$\frac{BD}{\sin C}=\frac{DC}{\sin\angle DBC}$,即$\frac{x}{\sin45°}=\frac{1}{\sin15°}$.所以$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$.

在$\triangle ACB$中,根据余弦定理,$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$.有

$$AB^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times2\times(\sqrt{3}+1)\times\frac{1}{2}=6.$$

而$AD\cdot AC=2\times3=6$,所以$AB^2=AD\cdot AC$.于是$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$,可得$\angle ABD=\angle ACB$,$AB$是$\triangle ABC$的外接圆的切线.

14. **解** 依题设和正弦定理可得

$$2\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\cos B+\frac{\sin B}{\sin A}\cdot\cos A,$$

即
$$\sqrt{2(1-\cos C)}=\frac{a}{b}\cos B+\frac{b}{a}\cos A.$$

再由余弦定理得

$$\sqrt{2-\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{b}{a}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

上式可变为

$$4abc^2[c^2-(a-b)^2]=(a+b)^2[(a-b)^4+2c^2(a-b)^2+c^4],$$

即 $$(a-b)^2[(a-b)^2(a+b)^2+2c^2(a^2+b^2+4ab)+c^4]=0.$$

因$(a-b)^2(a+b)^2+2c^2(a^2+b^2+4ab)+c^4>0$,故$(a-b)^2=0$,即 $a=b$. $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

15. **证明** 如图,$\triangle ABC$ 中 $A:B:C=1:2:4$. 即 $A=\frac{\pi}{7}$, $B=\frac{2\pi}{7}$, $C=\frac{4\pi}{7}$. AD、BE、CF 是$\triangle ABC$ 的角平分线, R 为外接圆半径. 于是, $\angle ACF=\angle FCB=\angle CBF=\frac{2\pi}{7}$, $CF=BF$, 且

$$CE=\frac{ab}{a+c}=\frac{2R\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}, \quad ①$$

$$BD=\frac{ca}{b+c}=\frac{2R\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}, \quad ②$$

由①、②可得

$$\frac{CE}{BD}=\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}}$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{2\pi}{7}}\cdot\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{3\pi}{14}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{4\pi}{7}}=1.$$

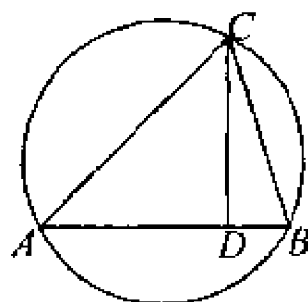
所以 $CE=BD$. 从而可知$\triangle CEF\cong\triangle BDF$,有 $EF=DF$. 命题获证.

16. **证明** 根据余弦定理,有

$$\begin{aligned}BC^2&=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cos A\\&=1+c^2-2\cdot c\cdot\cos A.\end{aligned}$$

又根据正弦定理有 $BC^2=4R^2\sin^2A$,所以

$$1 + c^2 - 2c\cos A = 4R^2\sin^2 A. \qquad ①$$



因 $R \leqslant 1$,故由①得

$$1 + c^2 - 2c\cos A \leqslant 4\sin^2 A,$$

即 $$c^2 - (2\cos A)c + (1 - 4\sin^2 A) \leqslant 0. \qquad ②$$

由②可得 $$\cos A - \sqrt{3}\sin A \leqslant c \leqslant \cos A + \sqrt{3}\sin A$$

$$= 2\sin(A + \frac{\pi}{6}). \qquad ③$$

如图,过 C 作 $CD \perp AB$,垂足为 D.因为$\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以 D 在 AB 上,有

$$AB = c > AC \cdot \cos A = \cos A. \qquad ④$$

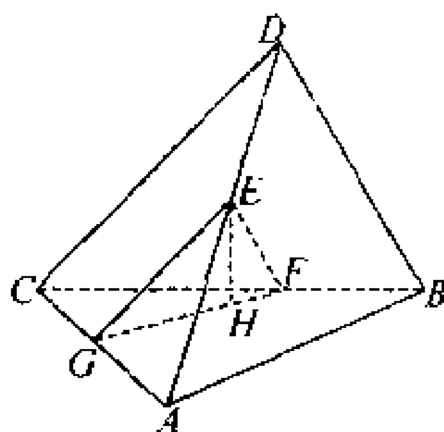
由③,④知命题成立.

练习十二

一、选择题

1. **解** 若点 E、F、G、H 不共面,则 EF 和 GH 不相交,可见甲是乙的充分条件;若直线 EF 和 GH 不相交,则 EF 和 GH 可能平行或异面,由此可知 E、F、G、H 共面或不共面,所以甲不是乙的必要条件,故选(A).

2. **解** 设 a,b 二异面直线的公垂线为直线 l,则与 l 平行的直线 c 均与 a,b 成直角(即均与 a,b 成相等的角),所以这样的直线 c 有无穷多条,选(C).



(第3题)

3. **解** 如图,取 CA 中点 G,连 FG,EG,则 $EG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$,$GF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$,$\angle EGF$ 即为异面直线 AB 与 CD 所成的角,$\angle EGF = 45°$,$\angle EFG$ 为异面直线 EF 与 AB 所成的角.

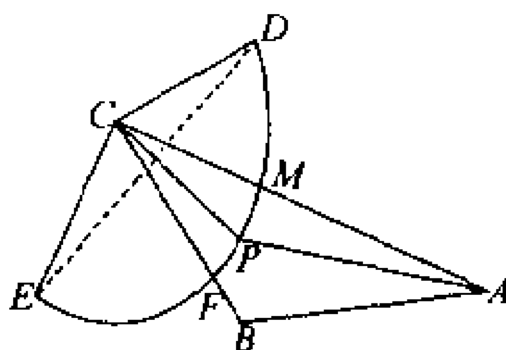
设 $CD = 2a$,则由 $AB : CD = \sqrt{2} : 1$ 知 $EG = a$,$GF = \sqrt{2}a$,作 $EH \perp GF$ 交 GF 于 H,有 $GH = EH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,$HF = GF - GH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.所以 $\tan\angle EFG = \frac{EH}{HF} = 1$,$\angle EFG = 45°$.选(C).

4. **解** 首先要注意到每锯一次后可以重新排列锯成的各块.为了使所锯次数最少,只需考虑最大的一块还需锯几次即可.

首先将 $5\times5\times5$ 的正方体锯一次,最大的一块至少是 $5\times5\times3$;锯第二次后,最大的一

块可以是 $5\times3\times3$ 或是 $5\times5\times2$.现考虑 $5\times3\times3$ 的情况($5\times2\times2$ 的情况可同样考虑);锯第三次,得 $3\times3\times3$ 的一块,这块的中心有一个单位正方体的六个面都需锯开,故至少还需锯6次.因此,总共至少锯9次才能达到目的.选(C).

5. **解** 易见当 A,B,C,D 共面时(如图),$|AD|$ 最小.因为 $\angle BCD$ 在 $0°$—$60°$间,所以 D 点的轨迹是以 C 为圆心,以 b 为半径的圆弧 $\overset{\frown}{EFD}$,其中 $\angle ECB=\angle BCD=60°$.连结 AC,设 AC 交 $\overset{\frown}{EFD}$ 于 M,则 $MA=AC-CM=\sqrt{3}a-b$.这时,对于 $\overset{\frown}{EFD}$ 上异于 M 的任一点 P,总有 $PC+PA>CA$,即 $PC+PA>CM+MA$,故 $PA>MA$.表明 MA 是最小值.因此选(B).



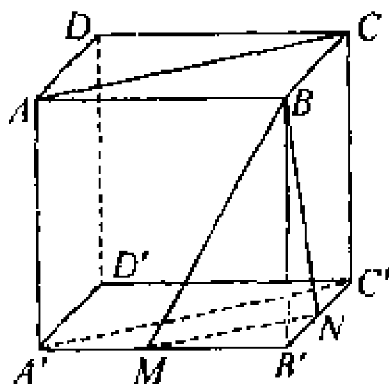
(第5题)

二、填空题

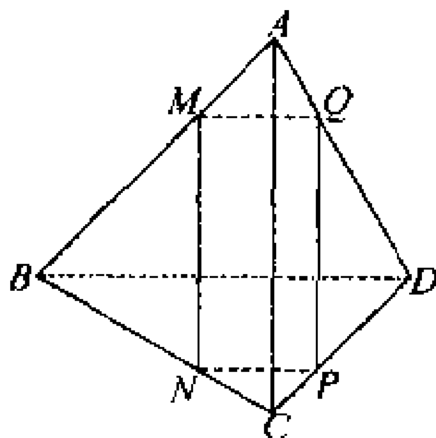
6. **解** 其中两条与 a,b 共面,它们互为反向射线,另四条与 a,b 不共面,,它们中的任一条与 a,b 形成以 P 为顶点的 $60°$角.

7. **解** 设 AC,BD 的中点分别为 E,F,再取 CD 的中点 G,连 EG,FG,EF,则 $EG/\!/AD,FG/\!/BC$,故 $\angle EGF$ 或它的补角是 BC,AD 所成的角,有 $\angle EGF$ 等于 $60°$或 $120°$.在 $\triangle EGF$ 中,当 $\angle EGF=60°$时,$EF^2=3^2+2-3\cdot2=7$;当 $\angle EGF=120°$时,$EF^2=3^2+2^2+3\cdot2=19$,所以 $EF=\sqrt{7}$或$\sqrt{19}$.即为所求.

8. **解** 取 $B'C'$中点 N,连 MN,则 $MN/\!/A'C',A'C'/\!/AC$.故$\angle BMN$ 是 AC 与 BM 所成的角.设正方体的棱长为 $2a$,则 $BM=BN=\sqrt{5}a$,$MN=\sqrt{2}a$,所以 $\cos\angle BMN=\frac{BM^2+MN^2-BN^2}{2BM\times MN}=\frac{\sqrt{10}}{10}$,所求角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.



(第8题)



(第9题)

9. **解** 因 $BM:MA=BN:NC=DQ:QA=DP:PC=2:1$,故 $MN \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} \frac{2}{3}AC$, $PQ \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} \frac{2}{3}AC$,于是 $MN \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} PQ$,同理 $MQ \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} NP\ \frac{1}{3}BD$,四边形 $MNPQ$ 是平行四边形.由 $AC\perp BD$ 可知 $MN\perp NP$,所以四边形 $MNPQ$ 是矩形.于是 $MN=\frac{2}{3}AC=\frac{8}{3}(\text{cm})$, $NP=\frac{1}{3}BD=2(\text{cm})$, $S_{MNPQ}=\frac{16}{3}\text{cm}^2$

10. **解** 连 D_1E;取 BC 中点 K,再连 GF 和 GK,易知$\angle GFK=\alpha$, $\angle D_1C_1E=\beta$,设正方体棱长为2,则 $\tan\alpha=\frac{D_1E}{D_1C_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\beta=\frac{GK}{FK}=2$,有 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=1$,故 $\alpha+\beta=90°$.

三、解答题

11. **证明** P、Q、R 是平面 ABC 与平面 α 的公共点,它们都在两平面的交线上.

12. **解** 设直线 l,直线 l 外不共线三点为 A、B、C 确定平面 α.若 $l\subset\alpha$,这时确定的平面只有 α 平面一个;若 $l\not\subset\alpha$:(i)A,B,C 三点中有两点与 l 共面,设点 A,B 与 l 共面,另一点 C 与 l 确定一个平面,共确定三个平面;(ii)A、B、C 三点无任何两点与 l 共面,这时 A、B、C 三点分别与 l 确定一个平面,连同平面 α 共确定4个平面.综上所述,可以确定的平面的个数只能是1个、3个或4个.

13. **证明** 连结 ME、EN、NF、FM,有 $ME \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} NF \underline{\mathbin{/\mkern-5mu/}} \frac{1}{2}AC$,四边形 $MENF$ 为平行四边形.设 MN、EF 相交于 O,则 MN、EF 平分于 O.同理 GH 与 MN,也平分于 O,故 EF、GH、MN 三线共点.

14. **解** (1)连结 AM、CM.因 BD 是 AB,CD 的公垂线,故$\angle ABN=\angle CDM=90°$, $AB=CD$,又 M 是 BD 的中点,$BM=DM$,所以 $\text{Rt}\triangle ABM\cong\text{Rt}\triangle CDM$,有 $AM=CM$.又 N 是 AC 的中点,故 $MN\perp AC$.(2)当 $AB=CD=a$, $BD=b$, $AC=c$ 时,$BM=\frac{1}{2}b$, $AN=\frac{c}{2}$,所以 $AM=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}$, $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{1}{4}c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2-c^2}$.

15. **解** 取 AF 中点 M,连 EM,BM,则$\angle BEM$ 是 BE,CF 所成的角.因 $CF=BD=1$,且依题设,E 是 AC 中点,所以 $EM=\frac{1}{2}CF=\frac{1}{2}$.又 $AB=AD$,$AF\perp BD$,故 F 是 BD 中点,$BF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$.在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中,$AF=\sqrt{AB^2-BF^2}=\sqrt{2}$, $MF=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故 $BM=\sqrt{BF^2+FM^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.由 $BM^2+EM^2=BE^2$ 可得$\angle EMB=90°$,$\text{Rt}\triangle BME$ 中,$\sin\angle BEM=\frac{BM}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以$\angle BEM=60°$,即为 BE、CF 所成的角.

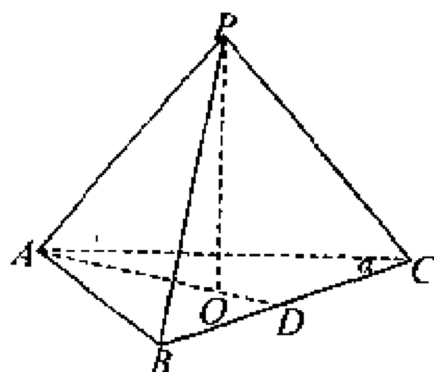
练习十三

一、选择题

1. (C)

2. (B)

3. 作 P 在平面 α 上的射影 O,连 PO,延长 AO 交 BC 于 D,则 AO 为 AP 在平面 α 内的射影.因 $PA\perp PC$, $PA\perp PB$,故 $PA\perp$平面 PBC,从而 $PA\perp PB$,由三垂线定理的逆定理知,$AO\perp BC$,同理,$BO\perp AC$,可知 P 在 α 内的射影必是$\triangle ABC$ 的垂心.故选(D).



(第3题)

4. 设 P 在平面 $ABCD$ 上和射影为 O,因 P 到四边的距离都相等,由斜线长定理可知,O 到四边距离都相等.从面 O 在$\angle A$,$\angle B$,$\angle C$,$\angle D$ 的角平分线上,又四边形 $ABCD$ 是平行四边形,故$\angle A$,$\angle C$ 的平分线不可能相交,只能重合或平行,但 O 同时在$\angle A$,$\angle C$ 的平分线上,则它们只能重合,同理$\angle B$ 和$\angle D$ 的平分线也重合.可证得对角线 AC,BD 平分两对内角,AC.BD 的交点即为 O 点.故四边形 $ABCD$ 是菱形.选(C)

5. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 是棱 DD_1 的中点,N 是棱 BC 的中点,P 是棱 A_1B_1 上的一点,$A_1P=\frac{1}{2}PB_1$,取 AD 的中点 E,可证得 $AM\perp$平面 A_1B_1NE.故选(D).

二、填空题

6. 作 $CC'\perp$平面 α 于 C',连结 AC',BC',则$\angle CAC'$,$\angle CBC'$,$\angle CDC'$,是 CA、CB、CD 与 α 所成的角,$\angle CAC'=30°$,$\angle CBC'=45°$.设 $CC'=h$,则有 $CA=2h$,$CB=\sqrt{2}h$,所以 $AB=\sqrt{4h^2+2h^2}=\sqrt{6}h$.又 $CD\perp AB$,故

$$CD=\frac{2S_{\triangle ABC}}{AB}=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}h,$$

$$\sin\angle CDC'=\frac{CC'}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以$\angle CDC'=60°$,即 CD 与平面所成的角为 $60°$.

7. 连 BC,因 C 是以 AB 为直径的圆周上一点,故 $CB\perp CA$.又 $PA\perp$平面 ABC,所以 $PA\perp BC$.因此 $BC\perp$平面 PAC,C 是垂足,线段 BC 的长即为点 B 到平面 PAC 的距离.

在 $Rt\triangle ABC$ 中,由 $AB=5cm$,$AC=2cm$,得

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}(\text{cm}).$$
所以点 B 到平面 PAC 的距离为$\sqrt{21}$cm.

8. 设 O 为 B_1D 中点,$OE//AC$.又 $AC\perp$面 BB_1D,故 $OE\perp BB_1D$,$\angle EBO$ 是 BE 与平面 B_1BD 所成的角,有

$$\cos\angle EBO=\frac{BO}{BE}=\frac{\sqrt{15}}{5}.$$

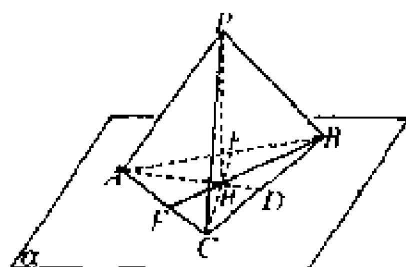
9. 过 B 作 $BH\perp AA_1$ 于 H. $BH=B_1A_1=3\sqrt{3}$, $AH=3$,由勾股定理求得 $AB=6$. $P\in\alpha$, AB 延长交 α 于 O.若 P 不与 O 重合,则 $AB>|PA-AB|$,所以当 P 与 O 重合时 $AP-PB$ 的最大值是6.

10. 依题设 $A'B'=A'C$,有$\angle B'A'C=90°$.设 $AA'=x$,在直角梯形 $AA'C'C$ 中,$A'C^2=4-(5-x)^2$ 于是 $2[4-(5-x)^2]=4$, $x=5\pm\sqrt{2}$.

三、解答题

11. (1)如图,作 $PH\perp$平面 α,垂足为 H,连 AH, BH, CH 并延长分别交对边于 D, E, F.

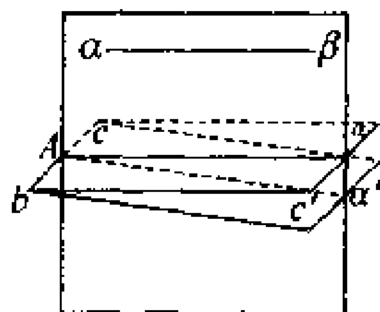
因 $PA\perp BC$, $PB\perp AC$,根据三垂线定理的逆定理,可得 $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, H 是$\triangle ABC$ 的垂心,所以 $CF\perp AB$.根据三垂线定理,$PC\perp AB$.



(第11题)

(2)同(1),设 H 为 P 在平面 α 内射影,则 $AH\perp BC$,又 $AC\perp BC$,且在平面 α 内过点 A 作 BC 的垂线是惟一的,故点 H 在 AC 上.

12. 作 $MP\perp BC$, $NQ\perp BE$,交 BC、BE 于 P、Q, $MP//AB$, $NQ//AB$,于是 $MP//NQ$,又 $NQ=\frac{\sqrt{2}}{2}BN=\frac{\sqrt{2}}{2}CM=MP$.故 $MPQN$ 是平行四边形,所以 $MN//PQ$, $PQ\subset$平面 BCE, MN 在平面 BCE 外,故 $MN//$平面 BCE.



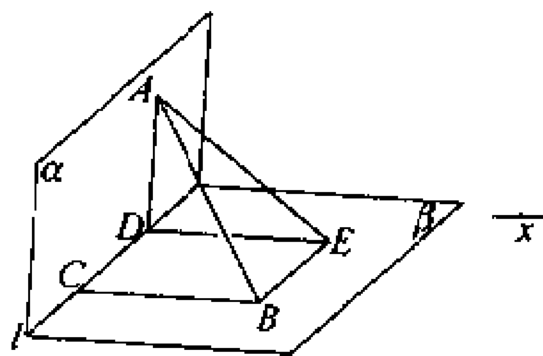
(第13题)

13. 如图,在 b 上取一点 A,则 $A\notin a$.过 A 作 $a'//a$, a'与 b 确定平面 α,又 $a\not\subset\alpha$,所以 $a//\alpha$,即知过 b 有一个平面与 a 平行.若两平面 α, α'满足 $a//\alpha$, $a//\alpha'$,且 $\alpha\cap\alpha'=b$,在 b 上任取一点 A,则 $A\in\alpha$,由 a 与点 A 确定平面β.设 $\alpha\cap\beta=c$, $\alpha'\cap\beta=c'$,则 $a//c$, $a//c'$,有 $c//c'$,与 $c\cap c'=A$ 矛盾.

14. (1)过点 A 作 $AE// CD$,垂足为 E,连 BE,设 $a\cap$平面 $ABE=F$.因 $b\perp CD$,所以 $b\perp AE$.又 $b\perp AB$,所以 $b\perp$平面 ABE.因 $CD\perp\beta$,所以 $AE\perp\beta$ 有 $AE\perp a$.因 $AB\perp a$,故 $AB\perp a$.所以 $a\perp$平面 ABE.于是 a,b 同垂直于平面 ABE 有 $a// b$.

(2)由(1)知 $b//\beta$,有 $AE=CD=5\text{cm}$,且 $a\perp AF$,线段 AF 的长即点 A 到直线 a 的距离,$\angle BAE$ 是异面直线 AB、CD 所成的角或它的补角,即 $\angle BAE=60°$ 或 $\angle BAE=120°$.因 $\angle ABF=\angle AEF=90°$,故 A、B、E、F 四点共圆,AF 是圆的直径,$\angle ABE=\angle AFE$.当 $\angle BAE=60°$ 时,$\angle ABE=60°$,$AF=\dfrac{AE}{\sin\angle AFE}=\dfrac{5}{\sin60°}=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$(cm).当 $\angle BAE=120°$ 时,$\angle ABE=30°$,$AF=\dfrac{AE}{\sin30°}=10$(cm).

15. (1)因 $BC\perp\alpha$,AC 是 AB 在平面 α 内射影,故 $\angle BAC$ 为 AB 与平面 α 所成的角,作 $AD\perp l$,且 $AD\cap l=D$.因 $BC\perp\alpha$,有 $BC\perp AD$,所以 $AD\perp\beta$.$\angle ABD$ 即为 AB 与平面 β 所成的角,$\angle ABD=45°$,设 $AB=1$,则 $BD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.依设 $\angle BDC=45°$,$\angle BCD=90°$,故 $BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BD=\dfrac{1}{2}$.注意到 $BC=\dfrac{1}{2}AB$,$\angle BCA=90°$,所以 $\angle BAC=30°$,AB 与平面 α 成 $30°$ 的角.



(第 15 题)

(2)因斜线和平面所成的角,是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中最小的角,故 $\angle ABD\leqslant\angle ABC$.又 $\angle BAC+\angle ABC\leqslant90°$,所以,$\angle ABD+\angle BAC\leqslant90°$.依题设,有 $\angle ABD=45°$,因此,$\angle BAC\leqslant45°$,即 AB 与平面 α 所成角不超过 $45°$.

(3)由(1)知 $AD\perp\beta$,且 CD 是 AD、BC 的公垂线在平面 β 内,如图,作 $BE// l$、$\angle ABE$ 即为 AB 与 l 所成的角.再将 CB 平移至 DE,依题设,$AD=1$,$BC=1$,故 $DE=1$,$AE=\sqrt{2}$.又因 $AB=2$,所以 $\sin\angle ABE=\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\angle ABE=45°$,即为所求.

练习十四

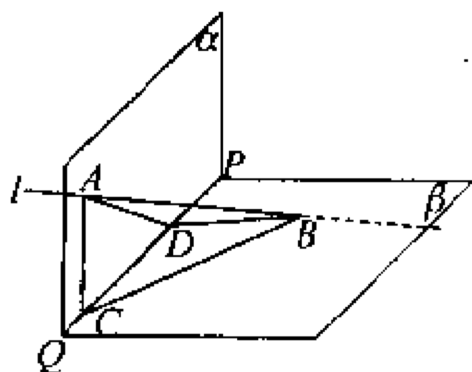
一、选择题

1. **解** 显然(C)、(D)是错的.设 $\alpha-l-\beta$ 是直二面角,在 l 上取点 O,在 α

内作 $OA // a$，在 β 内作 $OB // b$，若 $a \perp b$，则 $OA \perp OB$。在 β 内作 $OB' \perp l$，依题意 OB、OB' 不重合，这样，$OB' \perp \alpha$，有 $OB' \perp OA$，于是 $OA \perp \beta$ 得 $OA \perp l$，$\alpha \perp l$，与题设矛盾。故(A)错。选(B)。

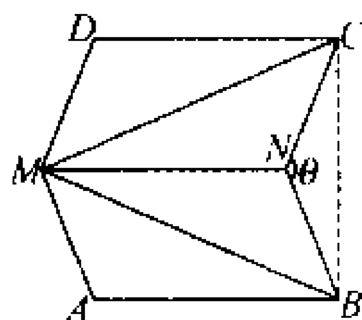
2. **解** 设 BC 中点为 E，则 $ME = \frac{1}{2}AC$，$NE = \frac{1}{2}BD$，在 $\triangle MNE$ 中由三角形两边之和大于第三边，即知选(B)。

3. **解** 如图，设 α 交 β 于 PQ，l 交 α，β 于 A，B，过 A 作 $AC \perp PQ$ 于 C，连 BC，过 B 作 $BD \perp PQ$ 于 D，连 AD。则 $\angle ABC$ 和 $\angle BAD$ 分别为 l 与 α，β 所成角 θ_1，θ_2。而 $\angle ABC + \angle BAC = \frac{\pi}{2}$，又 $\angle BAD \leqslant \angle BAC$，因而 $\angle ABC + \angle BAD \leqslant \frac{\pi}{2}$，即 $\theta_1 + \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$。故选(B)。



（第 3 题）

4. **解** 折后如图所示，$\angle BNC$ 为二面角的平面角，记为 θ，在 $\triangle BMC$ 及 $\triangle BNC$ 中，$BM = MC$，$MN = 2BN = 2NC$，根据余弦定理有



（第 4 题）

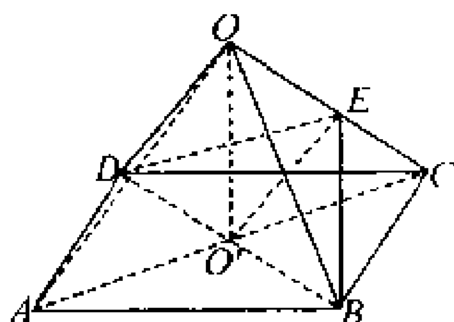
$$\cos\angle BMC = \frac{BM^2 + CM^2 - BC^2}{2BM \cdot CM}$$
$$= \frac{2BM^2 - (BN^2 + NC^2 - 2BN \cdot NC(\cos\theta)}{2BM^2}$$
$$= \frac{2(BN^2 + MN^2) - (2BN^2 - 2BN^2 - 2BN^2\cos\theta)}{2(BN^2 + MN^2)}$$
$$= \frac{MN^2 + BN^2\cos\theta}{BN^2 + MN^2}$$
$$= \frac{4BN^2 + BN^2\cos\theta}{5BN^2}$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\cos\theta.$$

又由 $\sin\angle BMC = 0.6$ 可得 $\cos\angle BMC = 0.8 = \frac{4}{5}$，故 $\cos\theta = 0$，$\theta = 90°$，选(A)。

二、填空

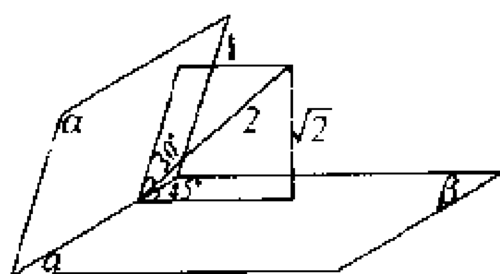
5. **解** 取中心 O 与下底面 $ABCD$ 构成一个正四棱锥 $O - ABCD$ 设它们的底面边长为 a，则高 $OO' = \frac{a}{2}$，则棱长为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$，设 $OC \perp$ 平面 BDE，则 $O'E =$

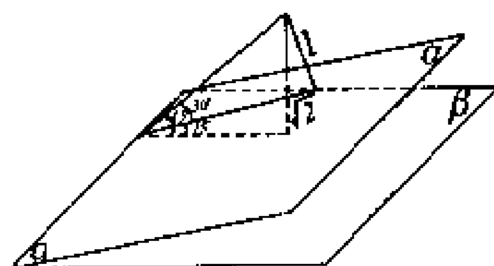
$\dfrac{OO' \cdot O'C}{OC} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a$,设所求二面角为 α,则 $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{O'B}{O'E} = \sqrt{3}$,$\dfrac{\alpha}{2} = 60°$,故 $\alpha = 120°$.



(第 5 题)

6. **解**　75°或 15°.如图,可分两种情形:

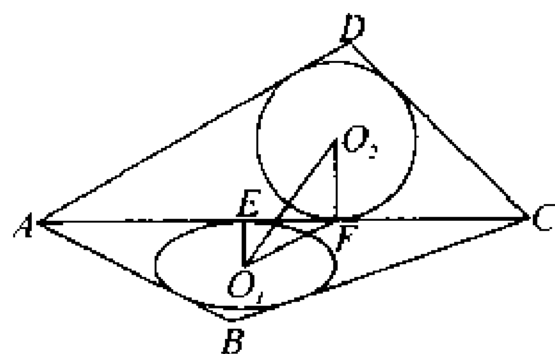




(第 6 题)

7. **解**　取 CD 的中点 Q,连 NQ,交 AC 于 O,连 MO.由 M,O 分别是 PC,AC 的中点知 $MO \parallel PA$.$PA \perp$ 平面 AC.所以 $MO \perp$ 平面 AC,又 $AB \perp AB$,故 $AB \perp MN$.当 $MN \perp PC$ 时,因 $AB \perp MN$,$CD \parallel AB$,有 $MN \perp CD$.所 $MN \perp$ 平面 PCD,于是 $MN \perp MQ$.由 $MO \perp NQ$,O 是 NQ 的中点可知△MNQ 是等腰直角三角形,$\angle MQO = 45°$.由 $CD \perp$ 平面 MNQ 可知$\angle MQO$ 是二面角 $P-CD-B$ 的平面角,因此,所求二面角 $P-CD-B$ 的大小为 45°.

8. **解**　设$\odot O_2$ 与 AC 相切于 F,$O_2F \perp AC$,所以 $O_2F \perp$ 平面 ABC,连 O_1F,又$\odot O_1$ 与 AC 切于 E,故△O_1EF 为 Rt△ADC 中,$AD = 8$,$DC = 6$,即 $O_2F = \dfrac{AD + DC - AC}{2}$ 而 $O_2F = 2$,$AF = AD - O_2F = 8 - 2 = 6$,故 $CF = 4$.所以 $EF = 2$,Rt△O_1EF 中,$O_1F = 2\sqrt{2}$.



(第 8 题)

Rt△O_1O_2F 中,

$$O_1O_2^2 = O_2F^2 + O_1F^2 = 4 + 8 = 12.$$

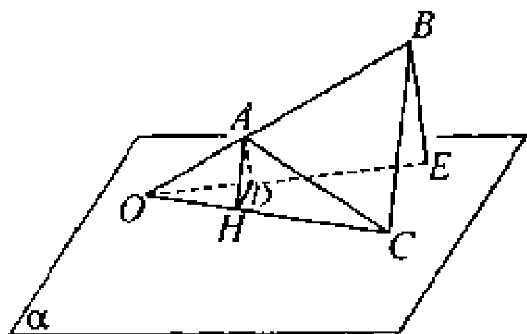
即 $O_1O_2 = 2\sqrt{3}$

9. **解**　如图,设 BA,ED 交于 O,则 $O \in$ 平面 ABC,$O \in$ 平面 α,故 O 在面 ABC 与平面 α 的交线上,即 OC 是平面 ABC 与 α 所成二面角的棱.过 D 作 $DH \perp OC$,$\angle AHD$ 是面 ABC 与 α 所成二面角的平面角.

因 $AD\perp\alpha$，$BE\perp\alpha$，故 $AD /\!/ BE$. 所以，有

$$OA:OB = AD:BE = 1:2,$$

于是 $OA = AB = 2$.



(第 9 题)

在 Rt△AOC 中，$\angle OAC = \frac{\pi}{2}$，$AC=\sqrt{2}$，则

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} OC \cdot AH,$$

可得

$$AH = \frac{OA \cdot AC}{OC} = \frac{2\times\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

在 Rt△AHD 中，
$$\sin\angle AHD = \frac{AD}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

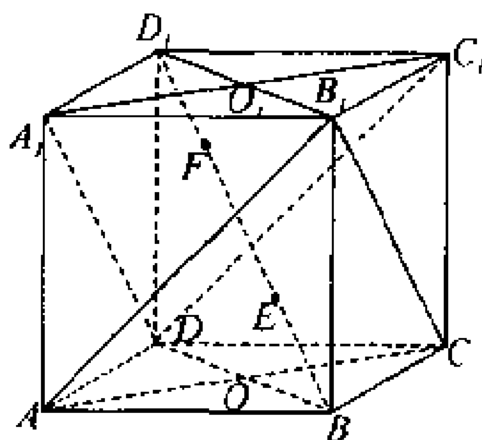
由此可得 $\angle AHD = \frac{\pi}{3}$，故△$ABC$ 所在面与平面 α 所成二面角为 $\frac{\pi}{3}$.

也可运用面积射影定理来解.

10. **解** 作棱 AA' 的垂面、PQ 的中点此截面上，再作 BD、A_1C_1 在此中截面上的射影 B_oD_o，A_oC_o，显然 $A_oC_o\perp B_oD_o$，P、Q 在此中截面上射影分别为 P_o、Q_o，由 $PQ=l$、$PP_o=QQ_o=\frac{a}{2}$，得 $P_oQ_o=\sqrt{l^2-a^2}$，PQ 的中点即 P_oQ_o 的中点，其轨迹是以 B_oD_o 与 A_oC_o 的交点为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{l^2-a^2}$ 为半径的圆，面积为 $\frac{\pi(l^2-a^2)}{4}$.

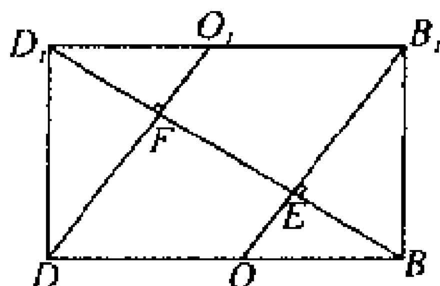
三、解答题

11. **解** (1)解一 从线段平行出发，由 $AA_1 \underline{/\!/} BB_1$，$CC_1 \underline{/\!/} BB_1$，$AA_1 \underline{/\!/} CC_1$，四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，$AC /\!/ A_1C_1$. 同理 $AB_1 /\!/ DC_1$，因 $AC\subset$ 平面 AB_1C，$A_1C_1\not\subset$ 平面 ABC；故 $A_1C_1 /\!/$ 平面 AB_1C. 同理 $DC_1 /\!/$ 平面 AB_1C，故平面 $AB_1C /\!/$ 平面 A_1C_1D.



解二 从面面平行出发. 因平面 $ABCD /\!/$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$. 则由平行直线 AA_1、CC_1 所确定的平面与上述两平面的交线 AC、A_1C_1 平行，有 $A_1C_1 /\!/$ 平面 AB_1C. 同理 $C_1D /\!/ AB_1$，有 $C_1D /\!/$ 平面 AB_1C. 所以平面 $A_1C_1D /\!/$ 平面 AB_1C.

解三　从线面垂直出发如图，连 BD_1，知 $BD_1\perp$ 平面 AB_1C 同理 $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D。故平面 $AB_1C//$ 平面 A_1C_1D。



(2)设 BD_1 与平面 AB_1C、平面 A_1C_1D 分别交于 E、F，则线段 EF 长即为平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 间的距离。如图，设 $AC\cap BD=O$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O_1$，则 E、F 为 B_1O、DO_1，与 BD_1 交点，$BE\perp B_1O$。由 $BB_1=1$，$OB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，及 $S_{\triangle OBB_1}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot BB_1=\frac{1}{2}B_1O\cdot BE$，可得 $BE=\frac{\sqrt{3}}{3}$。同理 $D_1F=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

因 $BD_1=\sqrt{3}$，故 $EF=BD_1-BE-D_1F=\frac{\sqrt{3}}{3}$。平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

12. **证明**　设 $AB=a$，$CF=DE=x$，则 $FO=x$，$AE=EO=a-x$，在 $\triangle AEO$ 中，$\angle AEO=90°$，$AO^2=AE^2+EO^2=2(a-x)^2$。同样 $OC^2=2x^2$。在 $\triangle CFA$ 中，$CF\perp EF$，又二面角 $A-EF-D$ 为直二面角，所以 $CF\perp$ 平面 $ABFE$，$\angle CFA=90°$，$AF^2=AB^2+BF^2=a^2+(a-x)^2$，有 $AC^2=AF^2+CF^2=a^2-(a-x)^2+x^2=2a^2+2x^2-2ax$。于是 $\cos\angle AOC=\frac{OC^2+AO^2-AC^2}{2\cdot OC\cdot AO}=\frac{2x^2+2(a-x)^2-2a^2-2x^2+2ax}{2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}(a-x)}=\frac{1}{2}$。

故 $\angle AOC=120°$ 是定值。

13. **解**　折叠后二面角 $A-BD-C$ 的平面角为 $\angle AOC=\theta$，$AB=a$，故 $AO=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，而 AC 由余弦定理即得 $AC=\sqrt{2}a\sin\frac{\theta}{2}$，又 $EH//BD$，$AE:EB=m:n$，所以 $EH=\frac{m}{m+n}BD=\frac{\sqrt{2}am}{m+n}$。由 $EH//BD$，$FG//BD$，且 $EH//FG$，则 $EFGH$ 为平行四边形。面 AC 与 BD 垂直，可得 $GH\perp EH$，故 $EFGH$ 为矩形，要使 $EFGH$ 为正方形，即使 $EH=HG$。而 $\frac{HG}{AC}=\frac{DH}{DA}$，故 $\frac{HG}{\sqrt{2}a\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{n}{m+n}$。有 $HG=\frac{\sqrt{2}a\sin\frac{\theta}{2}\cdot n}{m+n}$，使 $EH=HG$，即 $\frac{\sqrt{2}am}{m+n}=\frac{\sqrt{2}an\sin\frac{\theta}{2}}{m+n}$ 即 $m=n\sin\frac{\theta}{2}$，故 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{m}{n}$。

所以当 $m<n$，取 $\theta=2\arcsin\frac{m}{n}$ 时，$EFGH$ 为正方形.

14. **证明** (1)由 $SA\perp$平面 α 及 AB 为圆直径易得$\triangle SAB$、$\triangle SAM$、$\triangle AMB$ 为直角三角形. 又由三垂线定理知 $SM\perp BM$，故$\triangle SBM$ 为直角三角形.

(2)由(1)$AN\perp$平面 SMB，又 $AH\perp BS$，连 NH，则由三垂线逆定理知 $NH\perp SB$. 故$\angle AHN$ 是二面角 $A-SB-N$ 的平面角.

(3)因$\angle BAM=\phi$，$\angle AHN=\theta$，在 Rt$\triangle BAM$ 中，$\tan\phi=\frac{BM}{MA}$，Rt$\triangle AHN$ 中，$\tan\theta=\frac{AN}{NB}$，故 $\tan\phi\cdot\tan\theta=\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AN}{NH}=\frac{BM}{NH}\cdot\frac{AN}{MA}$

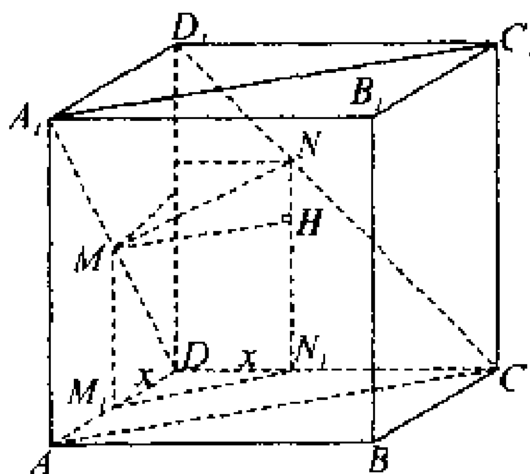
又$\frac{MB}{HN}=\frac{SB}{SN}$，$\frac{AN}{MA}=\frac{SN}{SA}$，所以 $\tan\phi\cdot\tan\theta=\frac{SB}{SN}\cdot\frac{SN}{SA}=\frac{SB}{SA}$.

而 Rt$\triangle SAB$ 中，$\angle SBA=30°$，故$\frac{SB}{SA}=2$. 所以 $\tan\phi\cdot\tan\theta=2$.

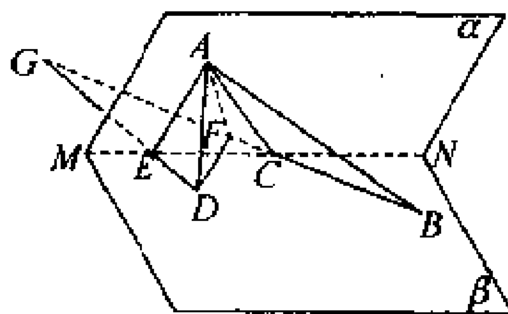
15. **解** 如图，作 $MM_1\perp AD$ 于 M_1，作 $NN_1\perp DC$ 于 N_1，则 $MM_1/\!/NN_1/\!/AA_1$. 又 $MN/\!/$平面 AC_1，故平面 $MM_1N_1N/\!/$平面 AC_1. $M_1N_1/\!/AC$. 设 $DM_1=DN_1=x$，则 $MM_1=x$，$NN_1=1-x$. 过 M 作 $MH\perp NN_1$ 于 H，则 $NH=1-2x$. $MH=M_1N_1=\sqrt{2}x$，根据勾股定理，得

$$MN^2=(\sqrt{2}x)^2+(1-2x)^2$$
$$=6(x-\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3},$$

故 MN 最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.



(第 15 题)



(第 16 题)

16. **解** 如图，作 $AD\perp\beta$，垂足为 D，作 $AE\perp MN$，垂足为 E. 连 DE，则 $DE\perp MN$，故$\angle AED$ 为二面角 $\alpha-MN-\beta$ 的平面角，$\angle AED=60°$.

$$
\begin{aligned}
AD &= AE\sin 60^\circ \\
&= AC\sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

作 $DF\perp BC$,交 BC 于 F,$\angle AFD$ 为二面角 $A-BC-M$ 的平面角.延长 BC,DE 交于 G,$\angle CGD=45^\circ$,又 $DG=DE+EG=\frac{3}{2\sqrt{2}}$,知 $DF=\frac{3}{4}$,故

$$
\tan\angle AFD=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3},
$$

$\angle AFD=\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$ 为所求.

17. **解** 作 $EH\perp AC$ 于 H,连结 HD,$\angle DHE$ 为所求的平面角

$$
\cos\angle DHE=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1^2}{2\times(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=\frac{1}{3};
$$

再求 $D-AE-B(C)$ 的平面角.作 $DM\perp AE$ 于 M,DM 延长线交 AC 于 N(如图(1)),在等腰$\triangle ADE$ 中

$$
DM\cdot AE=2S_{\triangle ADE}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{2},
$$

有

$$
\begin{aligned}
DM &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{AE} \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1^2+3^2-1\times 3}} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}.
\end{aligned}
$$

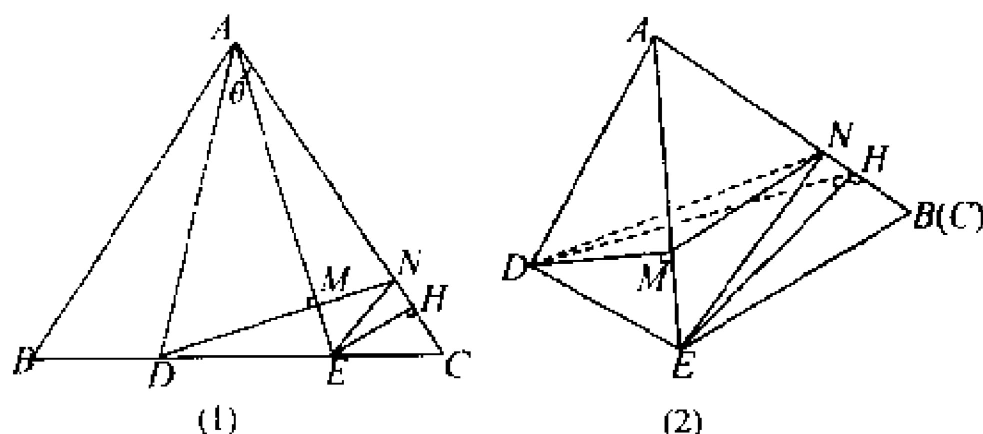
在$\triangle AEC$ 中(如图(1)),设$\angle CAE=\theta$,由$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ}$,可得 $\sin\theta=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$,

$\tan\theta=\sqrt{\frac{3}{5}}$,有

$$
MN=AM\cdot\tan\theta=\sqrt{AD^2-DM^2}\cdot\tan\theta
$$

$$=\sqrt{7-(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}})}\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$=\frac{13}{10}\cdot\sqrt{\frac{3}{7}}.$$



（第 17 题）

连结 NE(如图(2))，NE 长度与折后的 DN 相等在图(1)中，有

$$NC=\frac{DN\cdot\sin\angle NDC}{\sin60^{\circ}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot DN\left(\frac{ME}{DE}\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(DM+NW)\cdot\sqrt{DE^2-DM^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}+\frac{13}{10}\sqrt{\frac{3}{7}})\cdot\sqrt{1-(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}})^2}$$

$$=\frac{2}{5}.$$

在图(2)中，有

$$NE=NC^2+EC^2-2NC\cdot EC\cos60^{\circ}$$

$$=(\frac{2}{5})2+1-\frac{2}{5}=\frac{19}{25}$$

于是，如图(2)所示，△DMN 中

$$\cos\angle DMN=\frac{(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}})^2+(\frac{13}{10}\sqrt{\frac{3}{7}})^2-\frac{19}{25}}{2\times\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\cdot\frac{13}{10}\sqrt{\frac{3}{7}}}=\frac{5}{9}$$

所求的二面角的平面角的余弦值共有两种值，它是是$\frac{1}{3}$，$\frac{5}{9}$.

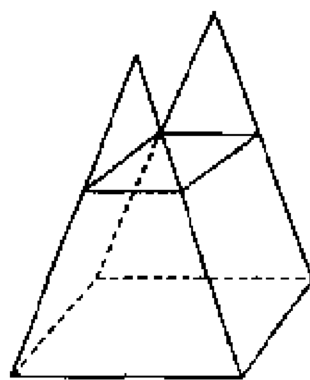
练习十五

一、选择题

1.**解** 如果一个棱锥的底面是正多边形，且顶点在底面的射影是底面中心，这样的棱锥叫做正棱锥. 对于(A)，不具备条件：顶点射影不一定是底面中心；对于(B)，棱锥顶点在底面的射影仅为底面多边形的外接圆圆心，底面不一定是正多边形；对于(C)，棱锥顶点在底面射影仅为底面多边形的内切圆圆心，底面也不一定是正多边形. 故(A)、(B)、(C)都不正确. (D)是正确的，事实上，当四面体的一个顶点在所对面的射影为该面的垂心时，易知四面体三对对棱两两垂直，又底面是正三角形，故该棱锥是正三棱锥.

应选(D).

2.**解** 棱台是用一个平行于棱锥底面的平面去截得的底面和截面之间的几何体，因此各侧棱必交于一点，①是错误的，如图所示，⑤也是错误的. 由正棱锥截得的棱台叫做正棱台，当棱台的各条侧棱相等时，将其还原成锥体，仅能保证棱锥的侧棱相等，即顶点在底面射影是底面多边形的外接圆圆心，底面多边形有外接圆(如矩形)，但不一定是正多边形. 故②不正确. 一底面是正多边形且一条侧棱垂直底面的棱锥，用平行于底面的平面去截得的棱台，上下底面为相似的正多边形，其余各面都是梯形，显然该棱台并非正棱台. 但棱台的高与它的一条侧棱相等，故④不正确，③正确.



(第2题)

应选(B).

3.**解** 因 $SA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，故 $SB\perp BC$. 设 $SA=AB=1$，则 $SB=BC=\sqrt{2}$. 因 E 为 SC 中点，故 $BE\perp SC$，$SC=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$，$\angle SAC=30^\circ$. 因此，$\angle EDC=60^\circ$，又 $ED\perp SC$，故 $SC\perp$面 BDE，$SC\perp BD$. 从面 $BD\perp$面 SAC，故 $BD\perp DE$，$BD\perp CD$，$\angle EDC$ 为二面角 $E-DB-C$ 的平面角. 应选(C).

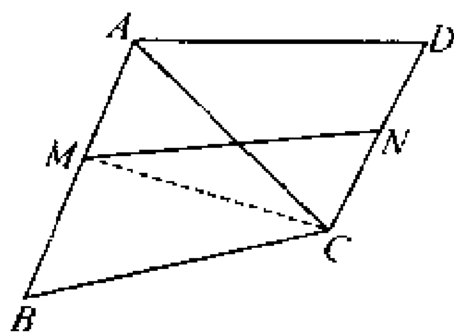
4.**解** 题设的三棱锥可看作长方体的一个角，于是有

$$\cos^2\angle APD+\cos^2\angle BPD+\cos^2\angle CPD=1,$$

即 $$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2+\cos^2\angle CPD=1.$$

得 $$\cos\angle CPD=\frac{1}{2}.$$

应选(D).



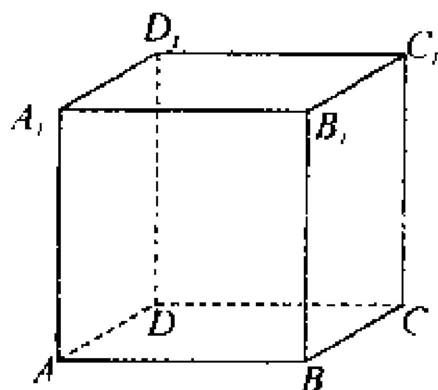
(第5题)

5. **解** 在四面体的表面上，由点 M 到 N 可能情形如下：(ⅰ)经过棱 AC；(ⅱ)经过棱 AD；(ⅲ)经过棱 BC；(ⅳ)经过棱 BD. 当上述四种情形由 M 到 N 的距离不全相等时，取其中最小值. 为此，不妨先按(ⅰ)的情形展开如图所示，则 $MN\min=MN$. 连接 MC，由 $MC^2=BC^2-BM^2$ 得 $MC^2=3a^2$，又 $AC=CD=2a$，$AD=2\sqrt{2}a$，知 $AC\perp CD$. 所以，

$$\begin{aligned}MN^2&=MC^2+CN^2-2MC\cdot CN\cdot\cos\angle MCN\\&=(4+\sqrt{3})a^2,\end{aligned}$$

$MN=\sqrt{4+\sqrt{3}}\,a$. 同理，按(ⅱ)、(ⅲ)的情形可得 $MN=2a$. 情形(ⅳ)与情形(ⅰ)相同.

综上所述，MN 最小值为 $2a$. 选(A).



(第6题)

6. **解** 按题设规则黑白蚁行进路线如下：

如图，白蚁 $AA_1\to A_1D_1\to D_1C_1\to C_1C\to CB\to BA$. 以下循环. 黑蚁 $AB\to BB_1\to B_1C_1\to C_1D_1\to D_1D\to DA$ 以下循环. 也就是每走完 6 段回到 A 点，再度重复进行. 由 $1990=331\times6+4$，可知当走完第 1990 段时，白蚁在 C 点，黑蚁在 D_1 点，$CD_1=\sqrt{2}$. 选(B).

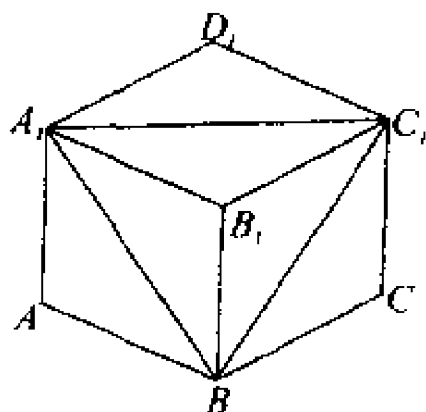
二、填空题

7. **解** 设正六棱锥侧面的顶角为 θ，侧棱长为 l，则底面边长 $a=2l\sin\frac{\theta}{2}$. 由于侧棱与底面所成的角为 θ，底面半径 $r=l\cos\theta$. 在正六棱锥中，底面边长 a 与底面半径 r 相等，因此 $2l\sin\frac{\theta}{2}=l\cos\theta$，即 $\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}$，可化为 $2\sin\frac{\theta}{2}+\sin\theta-1=0$，解得 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$（$\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}<-1$，舍去），$\theta=2\arcsin$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

8. **解** 由 A 点在 SBC 上射影 H 是 $\triangle SBC$ 的垂心,可知 $BH \perp SC$,于是 $AB \perp SB$,同理 $AC \perp SB$.设 S 在底面 ABC 上射影为 O,则 $CO \perp AB$,$BO \perp AC$,O 点是正 $\triangle ABC$ 的中心,此三棱锥是正三棱锥.设 CO 交 AB 于 D,BH 交 SC 于 G,则 $\angle GDC$ 为二面角 $H-AB-C$ 的平面角,$\angle DGC=90°$,故 $\angle SCO=60°$,设 $AB=1$,则 $CO=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$SA=SC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.所以 $SA:AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

9. **解** 如图,正方体的影子由三个平行四边形(有的平行四边形可因光线的某些照射方向而蜕化成线段)组成,面积等于 $\triangle A_1BC_1$ 面积的 2 倍,所以当原正方体的截面 A_1BC_1 与光线照射方向垂直时,正方体影子的面积 S 最大,且不难算出 S 的最大值是 $\sqrt{3}$.

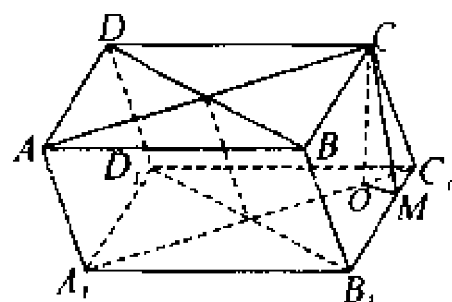


(第 9 题)

10. **解** 设点 P_1 处放上 m,P_2,P_3,P_4 与 P_1 相邻,则 P_2,P_3,P_4 所放的数都不小于 m,若 P_2、P_3,P_4 处所放的数中,有一个数比 m 大,则 P_1 处就不应当放 m.可见 P_2,P_3,P_4 处只能放 m.再考虑与 P_2,P_3,P_4 相邻的点,同样分析下去,它们也只能放 m.因此这个正十二面体各顶点只能都放 m.因此 $M=m$,$M-m=0$.

三、解答题

11. **解** (1)如图,作 $CO \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 于 O.由 $\angle CC_1B_1=\angle CC_1D_1$ 可知 O 在 $\angle B_1C_1D_1$ 的角平分线上.又因为 $A_1B_1C_1D_1$ 是菱形,所以 O 在 A_1C_1 上,且根据三垂线定理,由 $B_1D_1 \perp A_1C_1$ 得 $D_1B_1 \perp CC_1$.所以 $B_1D_1 \perp$ 平面 A_1C_1CA,平而 $BB_1D_1D \perp$ 平面 A_1C_1CA.



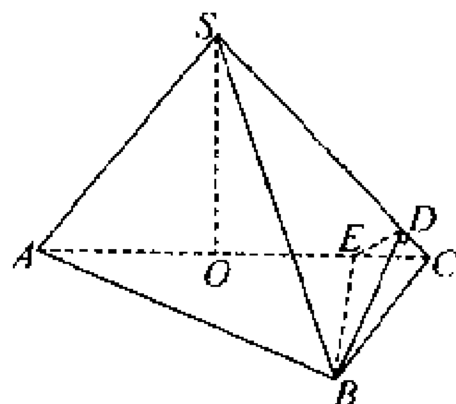
(第 11 题)

(2)作 $OM \perp B_1C_1$ 于 M,连 CM,在 $\mathrm{Rt}\triangle CC_1M$ 中,$CC_1=a$,$\angle CC_1M=60°$,有 $C_1M=\frac{1}{2}a$.在 $\mathrm{Rt}\triangle C_1MO$ 中,$\angle OC_1M=30°$,有 $OC_1=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.于是

$$CO^2 = CC^2 - C_1O^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

即得 C 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

12. **解** 如图,由 SA、SB、SC 与底面 ABC 成等角知,S 在底面射影 O 应为底面$\triangle ABC$ 的外心.由于$\triangle ABC$ 是直角三角形,所以外心 O 恰是斜边 AC 的中点.



(第 12 题)

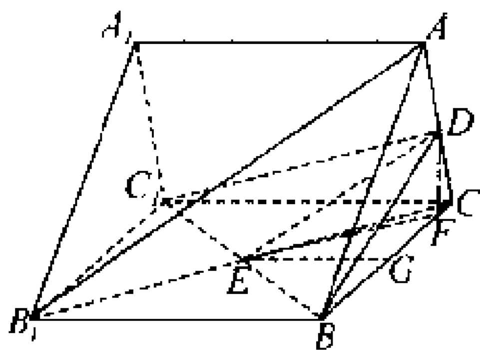
这时面 SAC 过底面 ABC 的垂线 SO,所以面 $SAC\perp$面 ABC.作 $BE\perp AC$ 于 E,则 $BE\perp$面 ACS.作 $BD\perp SC$ 于 D,连 ED,由三垂线定理的逆定理可知,$ED\perp SC$.故$\angle EDB$ 是二面角 $A-SC-B$ 的平面角,又$\angle SCA=\angle SAC=45°$.所以$\angle ASC=90°$.在 $Rt\triangle BED$ 中,

$$\tan\angle EDB=\frac{BE}{ED}=\frac{BE}{\frac{EC}{\sqrt{2}}}=\frac{\frac{AB\cdot BC}{AC}}{\frac{BC^2}{AC\cdot\sqrt{2}}}=\sqrt{2}\cdot\frac{AB}{BC}$$

$$=\sqrt{2}\cot\angle CAB=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}.$$

所以$\angle EDB=60°$.棱锥侧面 SAC 与 SBC 所成二面角 $A-SC-B$ 是 $60°$.

13. **解** (1)因 $A_1B_1C_1$—ABC 是正三棱柱,故四边形 B_1BCC_1 是矩形,连结 B_1C,交 BC_1 于 E,则 $B_1E=EC$.连结 DE,在$\triangle AB_1C$ 中,因 $AD=DC$,故 $DE/\!/AB$.又 $AB_1\not\subset$平面 DBC_1,$DE\subset$平面 DBC_1,所以 $AB_1/\!/$平面 DBC_1.



(第 13 题)

(2)作 $DF\perp BC$,垂足为 F,则 $DF\perp$平 B_1BCC_1.连结 EF,则 EF 是 ED 在平面 B_1BCC_1 上的射影.$AB_1\perp BC_1$.由(1)知 $AB_1/\!/DE$,所以 $DE\perp BC_1$,$BC_1\perp EF$,$\angle DEF$ 是二面角 $C-BC_1-D$ 的平面角.

设 $AC=1$,则 $DC=\frac{1}{2}$.因$\triangle ABC$ 是正三角形,故在 $Rt\triangle DCF$ 中,$DF=DC\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}$,$CF=DC\cdot\cos C=\frac{1}{4}$.取 BC 中点 G,有 $EG\perp BC$.

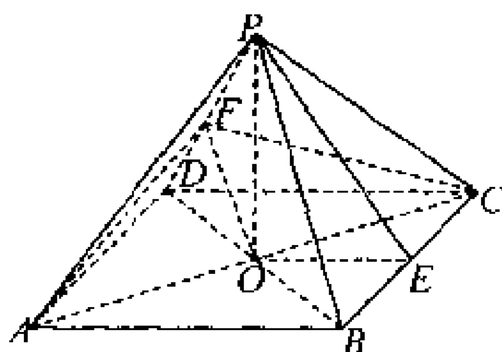
在 Rt$\triangle BEF$ 中，$EF^2 = BF \cdot GF$，又 $BF = BC - FC = \frac{3}{4}$，$GF = \frac{1}{4}$，所以 $EF = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 于是

$$\tan\angle DEF = \frac{DF}{EF} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = 1,$$

故$\angle DEF = 45°$，即为所求.

14. **证明** 如图，O 为底面中心，E 为 BC 中点，连 OE，PE，$\angle OEP$ 即为侧面与底面所成角，$\angle OEP = \alpha$. 设棱锥高为 h，底面边长为 a，于是

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{OE}{PE}\right)^2 = \frac{a^2}{4h^2 + a^2} \quad ①$$



（第 14 题）

注意到 $BD \perp AC$，根据三垂线定理有 $PD \perp AC$. 作 $AF \perp PD$，连 CF，则 $PD \perp$ 平面 AFC，$\angle AFC$ 为二面角 $A - PD - C$ 的平面角，$\angle AFC = \beta$. 考虑到对称性，连 OF，在 Rt$\triangle OPD$ 中

$$S_{\triangle OPD} = \frac{1}{2} OF \cdot PD = \frac{1}{2} OD \cdot OP,$$

解得 $OF = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}$. 从而

$$\tan\frac{\beta}{2} = \tan\angle AFC = \frac{AO}{OF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{ah}{\sqrt{a^2 + 2h^2}}} = \frac{\sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}}{h},$$

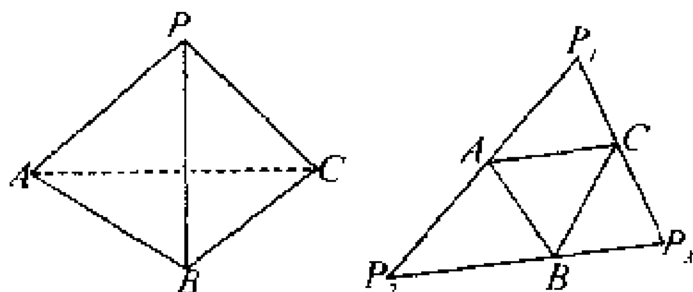
进而有

$$\cos\beta = \frac{1 - \tan^2\frac{\beta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \frac{\frac{a^2}{2} + h^2}{h^2}}{1 + \frac{\frac{a^2}{2} + h^2}{h^2}} = -\frac{a^2}{4h^2 + a^2}. \qquad ②$$

比较式①，②即知命题成立.

15. **证明** 如图(1)，设四面体 $P - ABC$ 中，顶点 A，B，C 处的每三个面角

之和均为 180°. 现沿 PA、PB、PC 剪开，将四面体的四个面展开在一个平面上如图(2)，依题设 P_1, A, P_2 三点共线，P_2, B, P_3 三点共线，P_3, C, P_1 三点共线. $\triangle ABC$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的中位线所构成三角形，故有 $BC = AP_1 = AP$，$AB = CP_1 = CP$、$AC = BP_2 = BP$.



（第 15 题）

16. **解** 显然四面体的四个面全等. 设这四个三角形面积为 S，根据面积射影定理，有

$$S\cos\alpha_1 + S\cos\alpha_2 + S\cos\alpha_3 = S,$$

有 $\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i = 1$. 同理 $\cos\alpha_2 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_6 = 1$，$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_5 + \cos\alpha_6 = 1$，$\cos\alpha_3 + \cos\alpha_4 + \cos\alpha_5 = 1$. 将上述各式相加即得 $\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i = 2$.

17. **证明** (1)设构成多面体的各界面多边形的边数都是 m 条，构成多面体的各多面角的棱数都是 n 条. 多面体的顶点数、面数与棱数分别为 V、F、E，由于每条棱是两个界面的公共边，每条棱又是两个顶点的连线，故 $m\cdot F = 2E$，$V\cdot n = 2E$，则 $E = \frac{mF}{2}$，$V = \frac{mF}{n}$. 根据欧拉定理，应有 $V + F = E + 2$. 故 $F = \frac{4n}{2(m+n) - mn}$.

由于 F 为不小于 4 的正整数，m, n 都是不小于 3 的正整数，则

当 $m = 3$ 时，$F = \frac{4n}{6-n}$，则 n 的值只能为 3,4,5；

当 $m = 4$ 时，$F = \frac{2n}{4-n}$，则 n 的值只能为 3；

当 $m = 5$ 时，$F = \frac{4n}{10-3n}$，则 n 的值只能为 3；

当 $m = 6$ 时，$F = \frac{n}{3-n}$，则 n 的值在不小于 3 时，都不能使 $F \geq 4$；

当 $m > 6$ 时，没有符合要求的 n.

综上所述，符合条件的多面体只有五种.

(ⅰ)当 $m=3,n=3,F=4$ 即是由 4 个三角形为界面组成的四面体；

(ⅱ)当 $m=3,n=4,F=8$ 即是由 8 个三角形为界面组成的八面体；

(ⅲ)当 $m=3,n=5,F=20$ 即是由 20 个三角形为界面组成的廿面体；

(ⅳ)当 $m=4,n=3,F=6$ 即是由 6 个四边形为界面组成的六面体；

(ⅴ)当 $m=5,n=3,F=12$ 即是由 12 个五边形为界面组成的十二面体；

(2)设正多面体由若干个正 m 面角与正 n 边形构成，其中 $m\geqslant3,n\geqslant3$，又正 n 边形的每一个内角等于$\frac{(n-2)\pi}{n}$，而多面角的各面角之和小于 2π，从而

$$m\cdot\frac{(n-2)\pi}{n}<2\pi,$$

即 $$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}.$$

又因正整数 $m\geqslant3,n\geqslant3$，则 m,n 不能同时都大于 3，否则它们的倒数和不能大于$\frac{1}{2}$.所以 m,n 中必有一个等于 3.

当 $m=3$，则$\frac{1}{3}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}$.从而 $n<6$.故 $n=3,4,5$.

由于 m,n 位置对称，从而 $n=3$ 时，$m=3,4,5$，因此正多面体只可能有如下五种：

$m=3,n=3$ 时为正四面体；

$m=3,n=4$ 时为正六面体；

$m=4,n=3$ 时为正八面体；

$m=3,n=5$ 时为正十二面体；

$m=5,n=3$ 时为正二十面体.

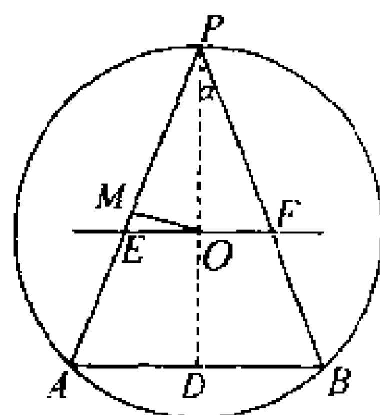
练习十六

一、填空题

1. **解** 球心在两截面的同一侧，平行截面间距离为$\sqrt{25^2-7^2}-\sqrt{25^2-20^2}=9$.球心在两截面之间，平行截面间距离为$\sqrt{25^2-7^2}+\sqrt{25^2-20^2}=39$.

2. **解** 设轴截面如图，圆锥母线与轴线所成角为 α，M 为 PA 中点，$PD\perp AB$，则 $\cos\alpha=\frac{PM}{PO}=\frac{PD}{PA}$于是 $\cos^2\alpha=\frac{PM}{PO}\cdot\frac{PD}{PA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{PD}{PO}$. 又$\frac{S_{圆锥PEF侧}}{S_{圆锥PAB侧}}=\frac{PO^2}{PD^2}=\frac{1}{2}$，

故 $\cos^2\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos2\alpha=\sqrt{2}-1$，有 $\alpha=\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1)$.



(第2题)

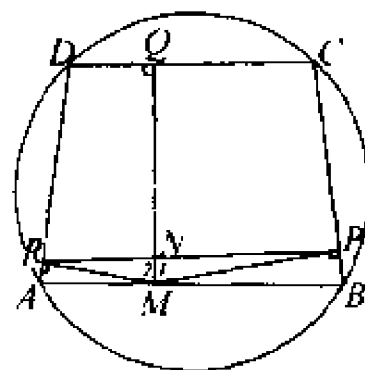
3. **解** 北纬60°线是地球的一个球小圆，其半径 $r=R\cos60°=\frac{1}{2}R$. A、B 两处经度相差120°，$AB=\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}R}{2}$.

设地球球心为 O，则在△AOB 中

$$\cos\angle AOB=\frac{R^2+R^2-(\frac{\sqrt{3}}{2}R)^2}{2R\cdot R}=\frac{5}{8}.$$

设地球表面航行，船自 A 驶向 B 的最短距离是球大圆上的 $\overset{\frown}{AB}$ 的长，$\overset{\frown}{AB}=R\arccos\frac{5}{8}$.

4. **解** 如图，作轴截面. A、B 为切点，设小球缺高为 h_1，底面直径 AB. 大球缺高 h_2，则 $h_1+h_2=4$，$h_2=4h_1$，$h_1=\frac{4}{5}$，$h_2=\frac{16}{5}$. 又



(第4题)

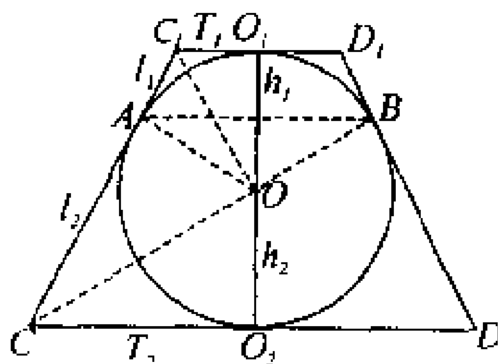
$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{1}{4}, \quad ①$$

$$l_1\cdot l_2=OA^2=4. \quad ②$$

由①，②得 $l_1=1$，$l_2=4$，于是 $r_2=l_2=4$，所以

$$S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)(l_1+l_2)=25\pi(\text{cm}^2).$$

5. **解** 如图，AB_1 与 OA 所成的角就是异面直线 AB_1 与 O_1A_1 所成的角. 若令上底半径 r，下底半径为 R，$S_侧=24\pi$，则 $\pi(R+r)\cdot4=24\pi$，得 $R+r=6$. 又由圆心角为 π，得 $R-r=2$，故 $R=4$，$r=2$. 在直角梯形中，解得 $OO_1=2\sqrt{3}$，在 Rt△OO_1B 中解得 $OB_1=2\sqrt{7}$. 因 $O_1A_1\perp O_1B_1$，故 $O_1A_1\perp OB_1$，进而知 $OA\perp OB_1$. 于是 $\tan\angle OAB_1=\sqrt{7}$. 即为所求.



(第5题)

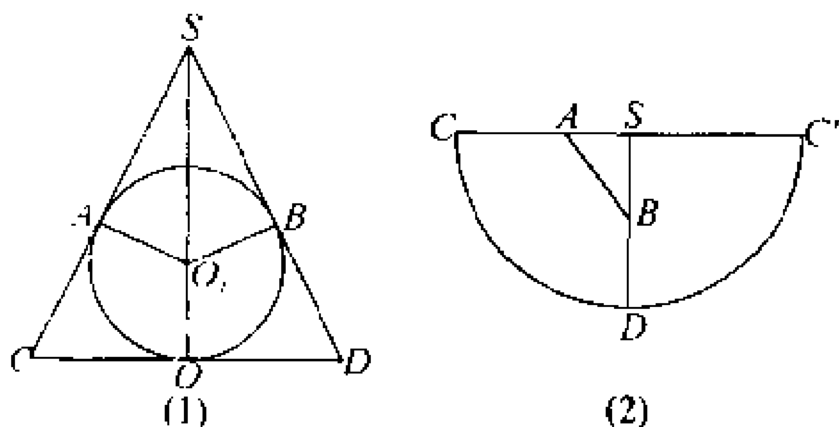
二、解答题

6. **证明** 设平面 M，N 上有两圆 C，C'，它们交于 A，B 两点. 取 AB 中点 H，

则 $CH\perp AB$, $C'H\perp AB$, 平面 $CHC'\perp AB$. 分别过 C, C' 作平面 M、N 的垂线，它们都在平面 CHC' 上，故交于一点 O，点 O 即为两圆同在球的球心，OA 为半径.

7. **解** 作圆锥的轴截面，如图(1). 依题设知$\triangle SCD$ 是等边三角形，$OC=r$，A, B 是圆 O_1 与 SC, SD 相切的切点，易知 A、B 恰为 SC、SD 的中点. 于是 $O_1A=\frac{\sqrt{3}}{3}r$, $\angle AO_1B=\frac{2\pi}{3}$, AB 间的球面距离为$\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi r$.

圆锥侧面展开后的扇形弧长即圆锥底面周长 c，扇形半径即圆锥母线 l，有 $c=2\pi r$, $l=SC=2r$. 故扇形中心角 $\theta=\frac{c}{l}=\pi$. 这说明侧面展开图是个半圆，如图(2)，在此展开图上，$SA=r$, $\angle ASB=\frac{\pi}{2}$，可得 $AB=\sqrt{2}r$.



(第 7 题)

8. **证明** 过 P、Q、O 作球大圆面α，再过 O 作大圆面β, $\beta\perp\alpha$, $\alpha\cap\beta=AB$. 若 l 不能落在一半球内，那么 α, β 所分成的半球各有弧 l 的一部分，作 l 在平面 α 内的投影 l_1，则 l_1 不全含在 α 的另一半圆内，因此 l_1 必与 AOB 相交，设交点为 C，有 $PC+QC<l_1\leqslant l<2$. 但 $PC+QC\geqslant PO+QO=2$，矛盾.

9. **证明** 设最大的截面圆为 L，圆心为 O，半径为 R. 在几何体上任取一点 P, $P\notin L$. 设 AB 为 L 的直径，L' 为 P、A、B 所确定的圆，半径为 R'，则 $R'\leqslant R$. 又 AB 为 L' 的弦，有 $R\leqslant R'$，故 $R'=R$. 这表明几何体上任一点到 O 的距离等于 R，故这个几何体为球.

10. **解** 不妨设弦 $PA=x$, $PB=2x$, P, A, B 所在球的小圆圆心为 O'，则 A, B, O' 在一直线上，即 AB 为$\odot O'$的直径，作$\odot O'$直径 PD，连 CD，依题设 CD 为球 O 的直径，$CD=1$. 于是

$$PC=\sqrt{1-5x^2}\left(0<x\leqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

三弦长的和为

$$y = 3x + \sqrt{1 - 5x^2}$$

可变为

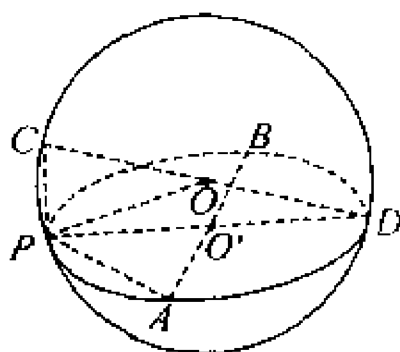
$$14x^2 - 6yx + y^2 - 1 = 0$$

于是,有

$$\Delta = (6y)^2 - 4 \times 14(y^2 - 1) \geq 0$$

解得 $y^2 \leq \frac{14}{5}$,当 $y = \sqrt{\frac{14}{5}}$ 时,$x = \frac{3}{\sqrt{70}} \in (0, \frac{1}{\sqrt{5}})$,故

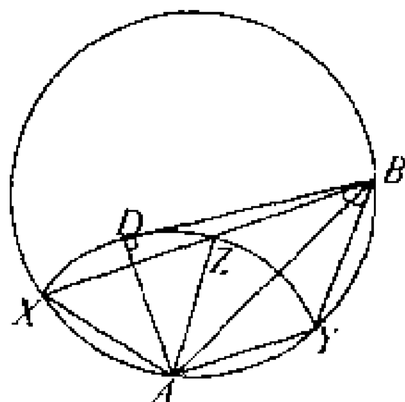
$y_{max} = \frac{\sqrt{70}}{5}$.



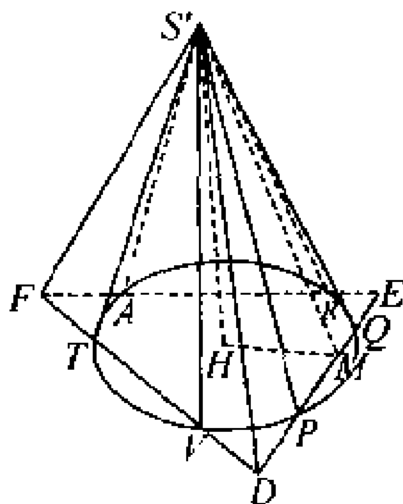
(第 10 题)

11. **证明** 依题设 X、A、Y、B 四点共圆,AB 为定长.设 $AB = a$.易知 $AX = AY$,与所选取的平面无关.如图,设 $AX = AY = b$.不妨设 $BX > BY$,作中心为 A,半径为 b 的圆交 BX 于 Z.因 $\triangle AYB \cong \triangle AZB$.有 $BZ = BY$.设 BD 为 X, Y, Z 所确定的圆的切线,则

$$BX \cdot BY = BX \cdot BZ = BD^2$$
$$= AB^2 - AD^2 = a^2 - b^2 (\text{常数}).$$



(第 11 题)



(第 12 题)

12. **证明** 依题设,$\triangle ABC$ 为锐角三角形,将 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$、$\triangle CED$ 分别沿中位线 EF、FD、DE 折叠起来,得到四面体 $S' - EFD$(如图),其中 S' 就是 $\triangle ABC$ 的三个顶点的汇集点.

在原三角形 ABC 中,连结 CH 交 DE 于 M,则 $CH \perp DE$.折叠后的图中,即 $S'M \perp DE$,$HM \perp DE$.因此,$DE \perp$ 平面 $S'MH$,有 $S'H \perp DE$,同理 $DF \perp S'H$,所以 $S'H \perp$ 底面 DEF.

因此 S' 和⊙H 是一个圆锥的顶点和底面. 由于圆锥的母线长相等,故 $S'P = S'Q = S'R = S'A = S'T = S'V$. 即 $CP = CQ = AR = AS = BT = BV$.

练习十七

一、选择题

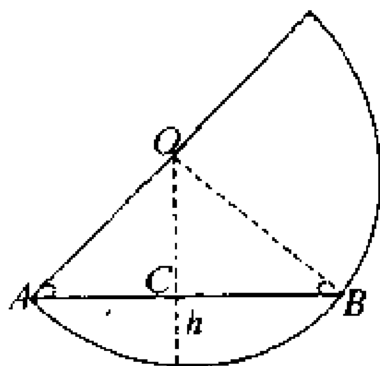
1. **解** 正方体中 $S = 6a^2$, $a = \sqrt{\frac{S}{6}}$, 有 $V_1 = a^3 = \sqrt{\frac{S^3}{216}}$; 等边圆柱中 $S = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot 2R = 6\pi R^2$, $R = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, 有 $V_2 = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi\sqrt{\frac{S^3}{216\pi^3}} = \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}} > \sqrt{\frac{S^3}{216}} = V_1$; 球中 $S = 4\pi R^2$, $R = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$, 有 $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \sqrt{\frac{S^3}{36\pi}} > \sqrt{\frac{S^3}{54\pi}} = V_2$, 故 $V_1 < V_2 < V_3$. 选(A).

2. **解** 设正方体棱长是 a, 它的外接球和内切球的半径分别是 R 和 r, 内切球体积是 V, 则

$$\begin{cases} 4\pi R^2 = 2\pi, & ① \\ (2R)^2 = 3a^2, & ② \\ r = \frac{a}{2}. & ③ \end{cases}$$

由①得 $R^2 = \frac{1}{2}$; 代入②, 可得 $a^2 = \frac{2}{3}$, 即 $a = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 代入③, 得 $r = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 于是 $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{6}}{6})^3 = \frac{\sqrt{6}}{27}\pi$, 选(C).

3. **解** 四面体中三条棱长均为 1 的两个面的夹角 θ 的大小与 x 有关, θ 越大, x 越大, 当 $0° < \theta < 90°$ 时, $F(x)$ 随 x 增大而增大; 当 $\theta = 90°$ 时, 两个面垂直, 四面体体积最大为 $\frac{1}{8}$, 这时 $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$; 当 $90° < \theta < 180°$ 时, 四面体的体积 $F(x)$ 将随角度增大而减小. 即此时 x 越大, $F(x)$ 越小. 综上可知 $F(x)$ 在其定义域内不是增函数, 但有最大值. 选(D).



(第 4 题)

4. **解** 如图, $\angle OAB = \angle OBA = 30°$, $OC = \frac{1}{2}OA$

$=\frac{1}{2}R$. 留下的水的体积为球缺的体积，球缺的高 $h=\frac{1}{2}R$，$V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi(\frac{R}{2})^2(3R-h)=\frac{5}{24}\pi R^3$，$V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$，溢出的水的容积 $V=\frac{11}{24}\pi R^3$，所求的比值为 $\frac{11}{16}$. 故选(D).

5. **解** 设截面圆半径为 r，截面将圆台的高分为 h_1,h_2 两部分，则由题设知

$$\frac{1}{3}\pi h_1(r_1^2+r_1r+r^2)=\frac{1}{3}\pi h_2(r^2+rr_2+r_2^2) \qquad ①$$

将圆台还原成圆锥，设锥顶到上底距离为 x，可得

$$\frac{x}{x+h_1}=\frac{r_1}{r}, \qquad ②$$

$$\frac{x}{x+h_1+h_2}=\frac{r_1}{r_2}. \qquad ③$$

②，③联立可得 $h_2=\frac{r_2-r}{r-r_1}h_1$，代入①，简化得

$$(r_1^2+rr_1+r^2)(r-r_1)=(r_2-r)(r_2^2+rr_2+r^2)$$

即

$$2r^3=r_1^3+r_2^3.$$

故截面圆半径 $r=\sqrt[3]{\frac{r_1^3+r_2^3}{2}}$. 选(B)

二、填空题

6. **解** $AB=4\sqrt{2}$，$AC=BC=2\sqrt{13}$，$S_{\triangle SAB}=8$，$S_{\triangle SBC}=S_{\triangle SAC}=12$，$S_{\triangle ABC}=4\sqrt{22}$. 设此三棱锥的内切球半径为 R，则 $V_{S-ABC}=\frac{1}{3}R(S_{\triangle SAB}+S_{\triangle SBC}+S_{\triangle SAC}+S_{\triangle ABC})=\frac{1}{3}R(32+4\sqrt{22})=16$，解得 $R=\frac{16-2\sqrt{22}}{7}$.

7. **解** AB_1//平面 BC_1D，点 A 到平面 BDC_1 的距离即为所求. 设此距离为 h，有 $V_{A-BC_1D}=V_{C_1-ABD}$，即 $CC_1\cdot S_{\triangle ABD}=h\cdot S_{\triangle BDC_1}$，解得 $h=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

8. **解** 设这个六面体的内切球半径为 r_1 有

$$\frac{1}{3}\times 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r_1=2\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot a^2\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}. \qquad ①$$

设正八面体的内切球半径为 r_2，又有

$$\frac{1}{3}\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot r_2=2\times\frac{1}{3}\times a^2\cdot\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}. \qquad ②$$

由①,②可得$\frac{r_1}{r_2}=\frac{2}{3}$.

9. **解** 依题意知

$$4\sqrt{(\frac{b-a}{2})^2+h^2}\cdot\frac{a+b}{2}=a^2+b^2,$$

其中 h 为正四棱台的高,化简得

$$h^2=\frac{(a^2+b^2)^2-(b^2-a^2)^2}{4(a+b)^2}=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2},$$

即 $h=\frac{ab}{a+b}=3$,所以 $ab-3a-3b+b=9$,

$$(a-3)(b-3)=9.$$

由 $a-3<b-3$,知 $a-3=1$, $b-3=9$,可得 $a=4$, $b=12$. 所以正四棱台的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3(4^2+12^2+\sqrt{4^2\times 12^2})=208.$$

10. **解** 设 V 是四面体 $ABCD$ 的体积,则有

$$\frac{V}{V_{OBCD}}=\frac{AA_1}{OA_1}=\frac{AO}{A_1O}+\frac{OA_1}{OA_1}=k+1.$$

同理,有$\frac{V}{V_{OACD}}=\frac{V}{V_{OABD}}=\frac{V}{V_{OABC}}=k+1$.

由此得到

$$k+1=\frac{4V}{V_{OBCD}+V_{OACD}+V_{OABD}+V_{OABC}}=\frac{4V}{V}=4,$$

即 $k=3$.

三、解答题

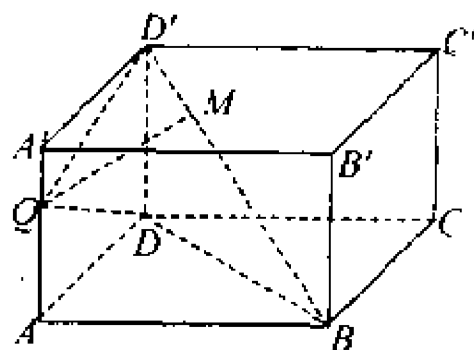
11. **解** 过四面体每一棱作平行于对棱的平面,六个平面围成的几何体是这个四面体的外接平行六面体. 由于四面体各面全等,可得三组对棱都分别相等,因此对应的平行六面体是长方体. 设此长方体长宽高分别为 a、b、c,则

$$\begin{cases} a^2+b^2=261, \\ b^2+c^2=289, \\ c^2+a^2=100. \end{cases}$$

解得 $a=6$, $b=15$, $c=8$,内接八面体体积是该长方体的$\frac{1}{6}$,等于 120.

12. **解** 设长方体的三棱长分别为 a, b, c,因 AA' 与平面 $D'DBB'$ 平行,$A'A$ 与平面 $D'DBB'$ 的距离即 $A'A$ 与 BD' 的距离,也是直角三角形 $A'B'D'$ 的斜边 $B'D'$

上的高$\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$



（第 12 题）

同理，另二个最短距离分别为$\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}$和$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$于是，有

$$\begin{cases}\dfrac{a^2c^2}{d^2+c^2}=(2\sqrt{5})^2=20,\\ \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}=(\dfrac{30}{\sqrt{13}})^2=\dfrac{900}{13},\\ \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=(\dfrac{15}{\sqrt{10}})^2=\dfrac{225}{10},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{20},\\ \dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{13}{900},\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{10}{225}.\end{cases}$$

解得 $a^2=\dfrac{900}{36},b^2=\dfrac{900}{4},c^2=\dfrac{900}{9}$. 进而得 $abc=750$. 所以 P 的体积为 750.

13. **解**　设 d_A,d_B,d_C,d_D 分别为 A、B、C、D 到截面 $PMQN$ 的距离，依题设易知 $d_A=d_D=1,d_B=d_C=\dfrac{3}{2}$，且 $AQ:QB=d_A:d_B=2:3$. 连结 PQ，在三棱锥 $Q-PCN$ 中，

$$S_{\triangle PCN}:S_{\triangle BCD}=\frac{CD\cdot CN}{CD\cdot CB}=\frac{3}{10}. \qquad ①$$

设 A、Q 到底面 BCD 的距离分别为 h_A 和 h_Q 则$\dfrac{h_Q}{h_A}=\dfrac{BQ}{AB}=\dfrac{3}{5}$. ②

由①，②可得

$$V_{Q-PCN}=\frac{1}{3}S_{\triangle PCN}\cdot h_Q=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}S_{\triangle BCD}\cdot\frac{3}{5}h_A$$

$$=\frac{9}{50}V_{A-BCD}=\frac{9}{10}. \qquad ③$$

另一方面

$$V_{Q-PCN}=V_{C-PQN}=\frac{1}{3}S_{\triangle PQN}\cdot d_C=\frac{1}{2}S_{\triangle PQN}. \qquad ④$$

由③,④知 $S_{\triangle PQN}=\frac{9}{5}$.

同样可得 $S_{\triangle PQM}=\frac{6}{5}$.

所求截面面积为3.

14. 解 设通过长为 d 的线段 AB 的两个端点各作一条与 AB 垂直的直线,而且这两条直线也互相垂直.在这两条直线上分别截取以 A、B 为中点,长为 a 的线段以这两条线段的端点作为四面体的顶点,该四面体的每个面的面积等于 $\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{a}{2})^2+d^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{a^2+4d^2}$.因此,分别具有 $a_1=3,d_1=2$ 与 $a_2=1,d_2=\sqrt{56}$的两个四面体的四个面面积相等,事实上,

$$a_1\sqrt{a_1^2+4d_1^2}=a_2\sqrt{a_2^2+4d_2^2}=15.$$

因体积 $V=\frac{1}{6}a^2d$,而 $a_1^2d=18\neq\sqrt{56}=a_2^2d_2$.这表明体积不相等,故本题的答案是否定的.

15. 解 如图,作轴截面,则 $\angle APO=\angle O_1A_1O_2=\angle A_1O_1A=\alpha$,

$A_1O_1=PO_1\cdot\sin\alpha=H\sin\alpha$,

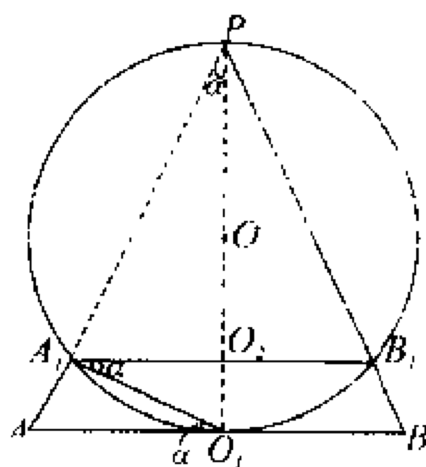
$A_1O_2=A_1O_1\cos\alpha=H\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

此即圆锥 $P-A_1B_1$ 的底面半径,进而又有

$PO_2=A_1O_2\mathrm{ctan}\alpha=H\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{ctan}\alpha$

$=H\cos^2\alpha$,

即圆锥 $P-A_1B_1$ 的高,所以



(第15题)

$$V_{球缺P-A_1OB_1}=\pi(H\cos^2\alpha)^2[\frac{H}{2}-\frac{H}{3}\cos^2\alpha]$$

$$=\frac{1}{6}\pi H^3\cos^4\alpha(3-2\cos^2\alpha),$$

$$V_{圆锥P-A_1B_1}=\frac{1}{3}\pi H^3\sin^2\alpha\cos^4\alpha.$$

它们的差为$\frac{1}{6}\pi H^3\cos^4\alpha$,即所求体积.

16. 解 三棱锥 $F-HCE$ 的体积为 V_1.正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面正方形 $ABCD$ 的边长为 a,棱锥 $S-ABCD$ 为高为 h.因 $ED=2CD$,故 $EC=3DC=3a$,$BC=a$,所以 $S_{\triangle ECB}=\frac{1}{2}\cdot3a\cdot a=\frac{3}{2}a^2$.因 F 是 SC 中点,棱锥 $F-ECB$ 的高为 h_1,

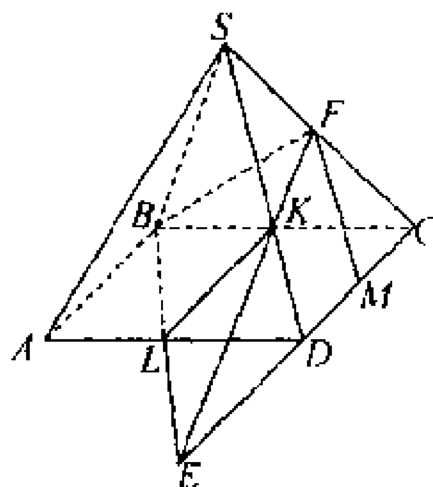
则有 $h_1=\frac{1}{2}h$，所以

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}a^2\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{4}a^2h.$$

设 EF 交 SD 于 K，BE 交 AD 于 L；三棱锥 $K-LED$ 的体积为 V_2. 因 $LD\parallel BC$，所以$\frac{LD}{BC}=\frac{ED}{EC}$，有

$$LD=\frac{BC\cdot ED}{EC}=\frac{a\cdot 2a}{3a}=\frac{2}{3}a.$$

于是　　$S_{\triangle EDL}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}a\cdot 2a=\frac{2}{3}a^2.$



（第 16 题）

在侧面 SCD 内作 $FM\parallel SD$，交 DC 于 M，因 F 是 SC 中点，故 FM 是 $\triangle CDS$ 的中位线，M 是 DC 中点. 设正四棱锥 $S-ABCD$ 的侧棱长为 b，有 $FM=\frac{1}{2}b$. 因 $\triangle EDK\backsim\triangle EMF$，所以

$$\frac{KD}{FM}=\frac{ED}{EM}=\frac{2a}{2a+\frac{1}{2}a},$$

可得 $KD=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}b=\frac{2}{5}b.$

设三棱锥 $K-EDL$ 的高为 h_2，$h_2=\frac{2}{5}h$，所以

$$V_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}a^2\cdot\frac{2}{5}h=\frac{4}{45}a^2h$$

多面体 $BFCDKL$ 的体积 $=V_1-V_2=\frac{29}{180}a^2h$，

多面体 $SALKFB$ 的体积 $=\frac{1}{3}a^2h-\frac{29}{180}a^2h=\frac{31}{180}a^2h$，

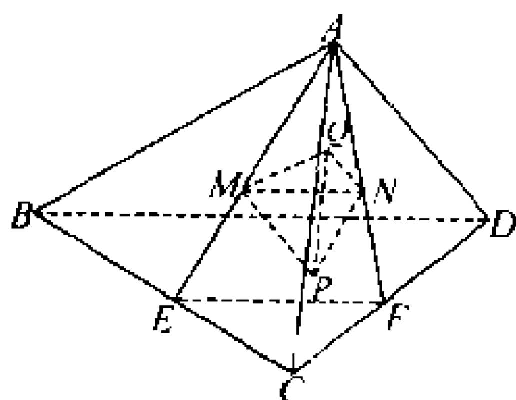
因此，截面 $KLBF$ 将正四棱锥分成的两部分体积之比 $=\frac{31}{180}a^2h:\frac{29}{180}a^2h=31:29$.

练习十八

一、填空题

1. **解**　考虑一个特例：构造正四面体 $ABCD$，设 P 为四面体的中心. 则 PA、PB、PC、PD 两两成相等的角. 不难算出该角的余弦值是 $-\frac{1}{3}$.

2. **解** 设 M,N 分别为$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 的中心.连 MN、EF,则 $MN=\frac{2}{3}EF$,而 $EF=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}a$.故 $MN=\frac{a}{3}$.同理四面体 $MNPQ$ 各棱长均为$\frac{a}{3}$.该四面体一个面的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{3}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{36}a^2$,所求四面体的全面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}a^2$.



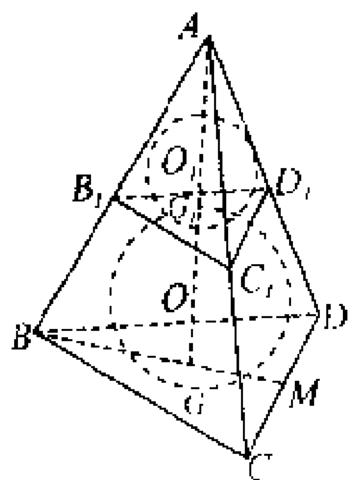
(第 2 题)

3. **解** 设点 G 到各面距离等于 r,点 O 到各面距离分别等于 h_1,h_2,h_3,h_4.则$\frac{V_{O-BCD}}{V_{G-BCD}}=\frac{h_1}{r}=\frac{A_1O}{A_1G}$,$\frac{V_{O-CDA}}{V_{G-CDA}}=\frac{h_2}{r}=\frac{B_1O}{B_1G}$,$\frac{V_{O-DAB}}{V_{G-DAB}}=\frac{h_3}{r}=\frac{C_1O}{C_1G}$,$\frac{V_{O-ABC}}{V_{G-ABC}}=\frac{h_4}{r}=\frac{D_1O}{D_1G}$.相加即得 4.

4. **解** 四个球心组成一个棱长 $a=4$ 的正四面体,它的中心 O 到各面的距离为四面体高的$\frac{1}{4}$,易知高为$\sqrt{a^2-(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$,所以 O 到各面的距离 $d=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

外切四面体的各面分别与上述四面体的各面平行,距离均为 2,所以外切四面体也是正四面体,与上述正四面体有公共的中心 O,并且与上述正四面体位似,位似中心为 O,而位似比为$\frac{d}{d+2}$,所以外切四面体的边长为

$$\frac{d+2}{d}\times 4=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}+2}{\sqrt{\frac{2}{3}}}\times 4=4(1+\sqrt{6}).$$



(第 5 题)

5. **解** 设 r 为正四面体 $ABCD$ 的内切球半径,h 为高,则 $r=\frac{h}{4}$.

依题设,经过球 O 与球 O_1 的切点 G_1 的两球公切面,在正四面体 $ABCD$ 中所截得的$\triangle B_1C_1D_1$ 也是正三角形,且四面体的 $AB_1C_1D_1$ 也是正四面体.设它的棱长为 a_1,则球 O_1 的半径 $r_1=\frac{\sqrt{6}}{12}a_1$.又

$$\frac{a_1}{a}=\frac{AG_1}{AG}=\frac{h-2r}{h}=\frac{h+2\times\frac{1}{4}h}{h}=\frac{1}{2},$$

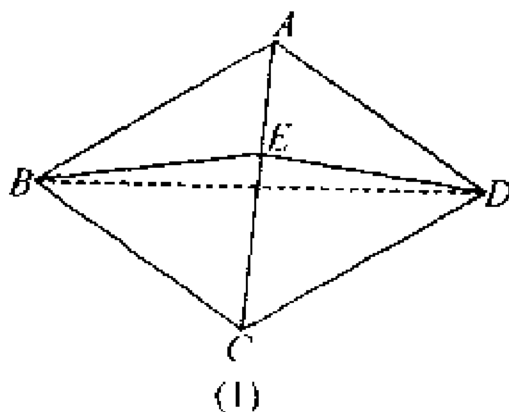
故 $r_1=\frac{\sqrt{6}}{24}a$.

二、解答题

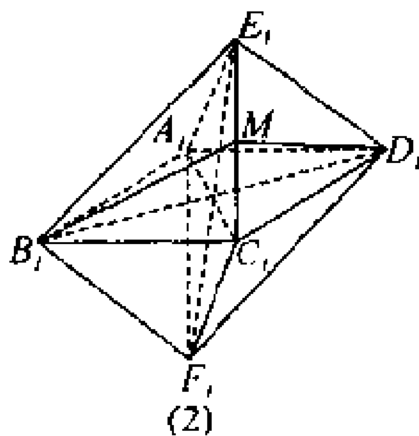
6. **证明** 先求正四面体 $ABCD$ 的相邻两面的二面角大小. 设棱长为 a, 取 AC 中点 E, 则 $\angle BED$ 为二面角平面角, $BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 根据余弦定理可得

$$\cos\angle BED=\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2-a^2}{2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=\frac{1}{3}.$$

故正四面体的二面角 $\arccos\frac{1}{3}$.



(1)



(2)

(第6题)

再求正八面体的二面角, 设正八面体 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 棱长为 a, 取 E_1C_1 中点 M, 连 B_1M、D_1M, 则 $\angle B_1MD_1$ 为二面角的平面角. $B_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $B_1D_1=\sqrt{2}a$, 根据余弦定理可得

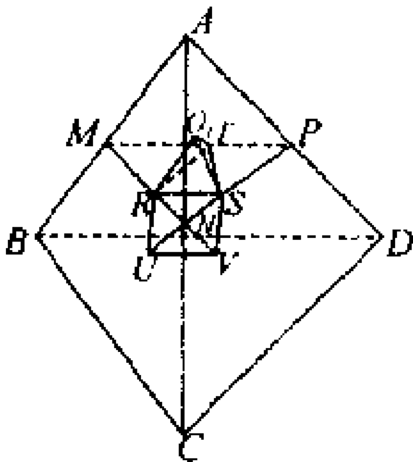
$$\cos\angle B_1MD_1=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2}{2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2}=-\frac{1}{3}.$$

故 $\angle B_1MD_1=\arccos(-\frac{1}{3})=\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

因为 $\arccos\frac{1}{3}+\arccos(-\frac{1}{3})=\pi$, 所以正四面体的二面角与正八面体的二

面角互为补角.

7. **解** 设原四面体体积是1,截成的几何体是十面体(共切6刀,在原四面体上还保留一部分),可按下述方法得到这一十面体:先将四面体切去四个大角(如图),如在顶点 A 处切去正四面体 $AMNP$,接着在原四面体各棱的中央各切去一个四棱锥,如图所示的 $N-RSVU$,最后再在原四面体的各角处补上一个小正三棱锥,如图中的三棱锥 O_1-RST.



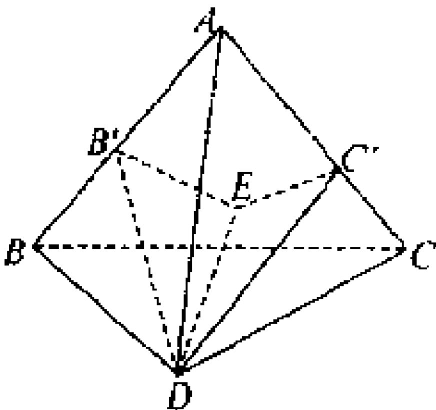
(第7题)

不难算得,$V_{AMNP}=\frac{1}{8}$,$V_{N-RSVU}=\frac{1}{32}$,$V_{O_1-RST}=\frac{1}{128}$,因此十面体体积为

$$V=1-4V_{AMNP}-6V_{N-RSVU}+4V_{O_1-RST}=\frac{11}{32}.$$

即它们的体积比为11:32.

8. **解** (1)设此四面体为 $ABCD$.在四面体 $ABCD$ 中,作 $DB'\perp AB$ 于 B',$DC'\perp AC$ 于 C',在 BAC 面内,过 B',C' 作 AB、AC 的垂线相交于点 E. $\angle DB'E$,$\angle DC'E$ 为二面角 $C-AB-D$ 和 $B-AC-D$ 的平面角,依题设 $\angle DB'E=\angle DC'E$.因 $AB\perp DE$,$AC\perp DE$,故 $DE\perp$ 平面 ABC.



(第8题)

在 $\mathrm{Rt}\triangle B'DE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle C'DE$ 中,$\angle DB'E=\angle DC'E$,$DE=DE$.所以 $\triangle B'DE\cong\triangle C'DE$,$B'D=C'D$.进而 $\triangle AB'D\cong\triangle AC'D$,$\angle BAD=\angle CAD$.

同理,在每个顶点A、B、C、D的三个面角分别相等.记顶点A的三个面角为 α,顶点B的三个面角为 β,顶点C的三个面角为 γ,顶点D的三个面角为 σ.

由 $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ=\alpha+\beta+\sigma$ 得 $\gamma=\sigma$.同理,$\alpha=\beta=\gamma=\sigma$.从而各面都是正三角形,所以ABCD是正四面体.

(2)如果有5个二面角相等,不一定是正四面体.例如可以构造这样一个四面体ABCD,使 $\angle ABC=\angle CBD=\angle DBA=40^\circ$,$\angle ACB=\angle BCD=\angle DCA=40^\circ$,$\angle BAD=\angle CAD=70^\circ$,$\angle BAC=100^\circ$,$\angle CDA=\angle BDA=70^\circ$,$\angle BDC=100^\circ$,

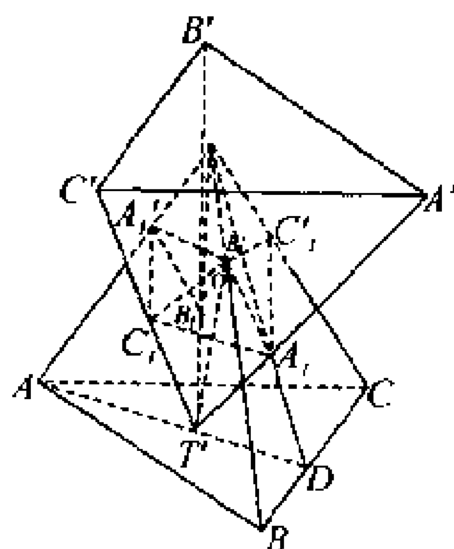
这样的四面体显然存在.可以证明,除二面角 $B-AD-C$ 外,其他5个二面角都相等,但不是正四面体.

9. **解** 易知对棱中点的连线均通过正四面体的中心.由于所作的任意一个平面都包含连接对棱中点的线段之一,故所作的平面都通过四面体中心.因此,所作的6个平面将整个空间分成若干个有公共顶点的多面角.这样,四面体被分成的每个部分的多面体必有一个面属于四面体的一个面.另一方面,四面体的两个面不可能分别包含同一个部分的被分割成的多面体的两个面,这是因为四面体的两个面被通过它们公共棱的平面所分离.故被分成的部分的数目等于原四面体表面被分成的块数,由于四面体每个面被分成全等的6块(被它的中线所分),整个表面被分成的块数就是$6\times4=24$.考虑到四面体关于6个平面的每一个对称,故所有24个部分彼此全等,因而每个部分体积是$\frac{1}{24}$.

10. **解** 如图,设D为BC中点,因$T'A'\parallel TA$,且A,T',D共线,故$T'A'$与TD相交,设交点为A_1,因

$$\frac{DA_1}{A_1T}=\frac{DT'}{T'A}=\frac{1}{2},$$

故A_1是$\triangle TBC$的重心.同理B_1,C_1,A'_1,B'_1,C'_1也是两三棱锥其他各侧面的重心.显见两三棱锥的公共部分为平行六面体$T'A_1C_1B'_1-TA'_1C'_1B_1$.



(第10题)

因

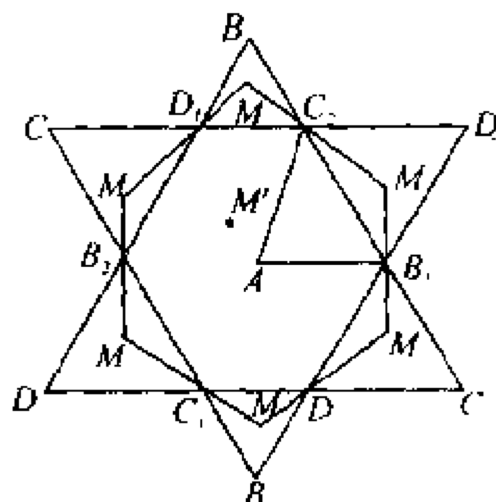
$$V_{T-A_1B_1C_1}=\frac{1}{27}V_{T-ABC},$$

故 $$V_{T-A_1C_1B_1-A'B'C'-T}=6V_{T-A_1B_1C_1}=\frac{2}{9}V_{T-A'B'C}=\frac{2}{9}.$$

即为所求.

11. **证明** 如果M是四面体的一个顶点,例如A,那么对面BCD的中心可作为M'.

设M不是顶点,不妨认为在面BCD上.将四面体按照图中所示铺开,此时6个M构成一个六边形,每两条对边平行且相等,而这个六边形的边的中点是B,C,D诸点.现在作它的各条边的垂直平分线.考虑相邻两边垂直平分线的交点,显然每一交点有三个M点到



(第11题)

它的距离是相等的.不同交点到相应的三个 M 点的距离中,至多有三种长度,其中必有一个相应距离最小的交点,如图 M′,即为所求.

若用 d_m 表示 M 到 M′曲线的最短长度,则当 M 为四面体顶点时 d_m 最大,当 M 为一条棱的中点时 d_m 最小.

练习十九

一、选择题

1. **解** 24个分点可连成12条直径.圆内接三角形的斜边必须是圆的直径,对确定的直径,其两端的两个分点与其余的22个分点均可连成直角三角形.因此,不同直角三角形有 $C_{12}^1C_{22}^1=264$(个).选(C).

2. **解** 从0到9这10个数字中任选3个数字,按递增或递减顺序排列有 $2C_{10}^3$ 种排法;但其中含有0作首位的不合要求,有 C_9^2 个.因此,符合要求的数的个数是 $2C_{10}^3-C_9^2=204$(个).选(C).

3. **解** 设∠A 的两边为 AB,AC.先在 AB 上取两点有 C_5^2 种取法,再在 AC 上取除 A 外的任一点,有 C_5^1 种取法,此类取法有 $C_5^2\cdot C_5^1$ 种.先在 AB 上(不包括 A)取一点,再在 AC 上(除去 A)取两点,有 $C_4^1\cdot C_5^2$ 种取法.根据加法原理,选(C).

二、填空题

4. **解** 分二种情形:其中一步走三级,有 C_8^1 种不同走法;有二步跨二级,有 C_8^2 种不同走法,共有不同走法 $C_8^1+C_8^2=36$(种).

5. **解** 分三类:ⅰ两邻边和一对角线构成的三角形有5个;ⅱ一边和两对角线构成的三角形,此两对角线必由一边的两端引出.对凸边形的每一边,其两端点分别可引出两条对角线,构成 $2\times2=4$ 个三角形,共构成 $4C_5^1$ 个三角形;ⅲ三对角线构成的三角形有 C_5^3 个.共构成三角形 $C_5^1+4C_5^1+C_5^3=35$(个).

6. **解** 平行四边形的个数等价于从 m 条平行线中任取两条,从另一组 n 条平行线中任取两条的组合数,即 $C_m^2\cdot C_n^2$.

7. **解** 分两类:2男3女或3男2女,有 $C_8^2\cdot C_7^3+C_8^3\cdot C_7^2=2156$ 种选法.

8. **解** 以长方体每个顶点为直角顶点的三角形共6个,又以长方体的顶点为顶点的三角形只能是直角三角形或锐角三角形,故所求锐角三角形的个数为 $C_8^3-6\times8=8$(个).

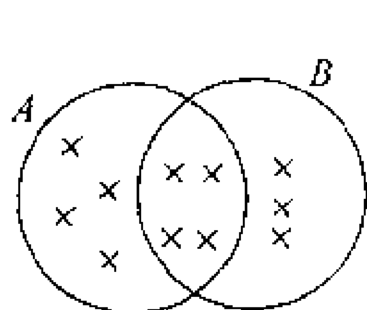
9. **解** 从平面上12个点任取三点为三角形顶点可以有 C_{12}^3个三角形,同一直线上的五个点不能构成三角形,减少 C_5^3 个;七个红点构成的 C_7^3 个三角形不合条件;五个蓝点构成的 C_5^3 个三角形也不合条件;三个在同一直线上的红点构成的三角形不合条件计算了两次,故所求的不全同色的点为顶点的三角形共有 $C_{12}^3-C_5^3-C_7^3-C_5^3+1=166$个.

10. **解** 将四棱锥底面四点取法分为四类:四点取在棱柱底面上:$2C_5^4C_5^1=50$;四点取在棱柱侧面上:$5C_6^1=30$;四点取在棱柱的对角面上:$5C_6^1=30$;四点取在一个底面中一条对角线的两端点,及另一个底面中与该对角线平行的一边的端点:$2\cdot5C_6^1=60$.相加得到四棱锥170个.

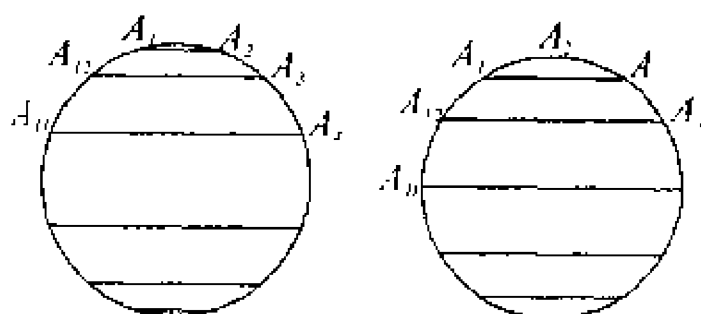
11. **解** 凸八边形共有对角线 $C_8^2-8=20$条,每两条对角线有一个交点时,则有 C_{20}^2个交点,但在顶点处,五条对角线交于一点,减少了 $8\times(C_5^2-1)$个,所求交点数为 $C_{20}^2-8(C_5^2-1)=118$个.

12. **解** 依题设,$A\cup B$ 中元素个数为 $8+7-4=11$个,分布如图,所求集合 C 的个数为

$$C_{11}^3-C_4^3-C_3^3=160.$$



(第12题)


(第13题)

三、解答题

13. **解** 如图,有两类等腰梯形的方法:(1)连结 A_1A_2,与 A_1A_2 平行的弦共有6条(包括 A_1A_2)能组成 C_6^2-3 个等腰梯形.连结相邻两点的弦共有6种不同的方向,故有 $6\times(C_6^2-3)$个等腰梯形.ⅱ连结 A_1,A_3,与 A_1A_3 平行的弦共有5条(包括 A_1A_3),能组成 C_5^2-2 个等腰梯形,连结相隔一点的弦共有6种不同的方向,故有 $6\times(C_5^2-2)$个等腰梯形.根据加法原理,所求等腰梯形的个数共有 $6(C_6^2-3)+6(C_5^2-2)=120$(个).

14. **解** (1)可以分成三类:取4个红球不取白球有 C_4^4 种方法;取3个红球1个白球有 $C_4^3C_6^1$ 种方法;取2个红球2个白球有 $C_4^2C_6^2$ 种方法根据加法原

理,得 $C_4^4+C_4^3C_6^1+C_4^2C_6^2=115$ 种方法.

(2) 设红球取 x 个,白球取 y 个,则有 $\begin{cases}x+y=5,\\2x+y\geq 7.\end{cases}$ 其中 $0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq 6$.
得三组解 $\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$ 于是可得取法种数 $C_4^2C_6^3+C_4^3C_6^2+C_4^4C_6^1=$ 186.

15. **解** 不考虑限制条件时选法数为 C_{20}^3.

(i) 恰有两个数相邻,共有 19 种情形,其中 i 这两个数是 1,2,那么第 3 个数可以是 4 到 20 中的任一个,即有 17 种选法;

(ii) 这两个数是 19,20,类似于 i 也有 17 种选法;

(iii) 这两个数选在中间位置,那么第三个数只有 16 种选法.

因此,恰有两个数相邻时的选法数为

$$17+17+(19-2)\times 16=17\times 18(\text{种}).$$

(2) 若三个数相邻,共有 18 种选法.

由(1),(2)知满足要求的选法有

$$C_{20}^3-(17\times 18+18)=C_{20}^3-18^2=816(\text{种}).$$

另解:可看作 17 个数中的 16 个空档及两头共 18 个位置中插入 3 个数,故有 $C_{18}^3=816$ 种不同选法.

16. **解一** 和 $a+c=s(=b+d)$ 可以取以下值:

$$5,6,\cdots,n+1,n+2,\cdots,2n-3$$

在和 S 取定后,相应的两个最小(大)的加数取自 $[\frac{s-1}{2}]$ 中,分别有 $C_2^2,C_2^2,C_3^2,C_3^2,\cdots,C_{\frac{n}{2}}^2,C_{\frac{n}{2}-1}^2,C_{\frac{n}{2}-1}^2,\cdots,C_2^2,C_2^2$ 种取法.因此,共有

$$\begin{aligned}&4(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{\frac{n}{2}-1}^2)+C_{\frac{n}{2}}^2\\&=4C_{\frac{n}{2}}^3+C_{\frac{n}{2}}^2\\&=\frac{n(n-2)(2n-5)}{24}\end{aligned}$$

种选取 $\{a,b,c,d\}$ 的方法.

解二 不妨设 a,b,c,d 中 a 最大,由于 $a+c=b+d$,所以 c 最小.

从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中选出三个数 $a>b>c$ 的方法有 C_n^3 种.对每一种选法,d 可由

$$d=a+c-b$$

确定，但其中 $d=b$ 即 $b=\frac{a+c}{2}$的情况应予排除．由于这时 a,c 奇偶性相同．它们以$\frac{n}{2}$个偶数或$\frac{n}{2}$个奇数中选出，共有

$$2\times C_{\frac{n}{2}}^{2}=\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)$$

种．因而合乎要求的 a,b,c,d 共有

$$C_n^3-\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-1)=\frac{1}{12}n(n-2)(2n-5)$$

组．d 也随之确定．但 b,d 的顺序不予考虑所以总的选法为

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{12}n(n-2)(2n-5)=\frac{1}{24}n(n-2)(2n-5)$$

种．

练习二十

一、选择题

1．**解**　可看作教授插入 6 名学生中间，有 $P_5^3=60$ 种不同方式．选(C)．

2．**解**　个位为 2,4 之一，首位不能为 5，满足题设的五位数有 $P_2^1\cdot P_3^1\cdot P_3^1=36$ 个．选(C)．

3．**解**　先安排 5 个独唱节目，再将合唱节目插入独唱节目间的 4 个空档及末尾中的 3 个位置，故有不同排法 $P_5^5\cdot P_5^3$ 种．选(C)

4．**解**　把相邻两个空座位看成一个整体则有 $P_5^3=120$ 种排法．但此时会出现 $2P_4^4=48$ 种排法含有三个空位相邻的情形，所以，共有 $P_5^3-2P_4^4=72$ 种排法．选(A)．

二、填空题

5．**解**　获得前 3 名的情形有 P_{15}^3种，剩下的 12 个队中有 3 个队被降级有 C_{12}^3种情形，故联赛不同的结果有 $P_{15}^3\cdot C_{12}^3=600600$(种)．

6．**解**　先选出 5 个家庭，有 C_{10}^5种方法．在这 5 个家庭中每个家庭任选一人，共有 3^5 种方法，再排成一列有 P_5^5 种方法，根据乘法原理，得 $C_{10}^5\cdot 3^5\cdot P_5^5=7348320$ 种方法．

7．**解**　甲跑第一棒的组队数有 P_3^3 种；乙跑最后一棒的组队数有 P_3^3 种；甲跑第一棒且乙跑最后一棒的组队数有 P_2^2 种．故共有 $P_4^4-2P_3^3+P_2^2=14$ 种．

8. **解**　首位不为零，没有重复数字的六位数共有 $5P_5^5$，其中符合题意的占 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}\cdot 5P_5^5=300$ 个．

9. **解**　如图

①	②	③	④
⑤	⑥	⑦	⑧

，一名儿童坐①、④、⑤、⑧号位时，符合题意的坐法有 $P_4^1P_5^1P_6^6$ 种；1 名儿童坐②，③，⑥，⑦位时，符合题意的坐法有 $P_4^1P_4^1P_6^6$ 种．所以共有 $P_4^1P_5^1P_6^6+P_4^1P_4^1P_6^6=25920$ 种．

10. **解**　记三张卡片为 $A(0,1)$，$B(2,3)$，$C(4,5)$．若 A 在百位，B 在十位，C 在千位，则共有 $P_2^2\cdot P_2^2\cdot P_2^2=8$ 个三位数，(含 0 在首位的数)互换卡片 A，B，C 的位置，有 P_3^3 种排法，故共有 $8P_3^3=48$ 个三位数，当 0 在百位时的三位数有 $P_2^2\cdot P_2^2\cdot P_2^2=8$．所以，共可排 $48-8=40$ 个不同的三位数．

11. **解**　$a_1a_2a_3a_4a_5$ 是 1，2，3，4，5 的一个排列，满足条件的五位数共有 $5!=120$ 个，这些数的个位数字之和，十位数字之和、百位数字之和，千位数字之和，万位数字之和都是 $(1+2+3+4+5)\times P_4^4=360$．故此这 120 个数之和为 $360\times 11111=3999960$．

三、解答题

12. **解**　(1)选送方案有(i)2，2，1，1，选送法有 C_4^2 种；(ii)3，1，1，1，选送法有 C_4^1 种．共有 $C_4^2+C_4^1=10$ 种选送法．(2) $C_6^2C_4^2C_2^2=90$．(3)把 6 人先分成 4 组，再分到四所学校去，有以下两种方案：(i)各组人数为 2，2，1，1，有 $\frac{1}{2}C_6^2C_4^2$ 种分组法，再分到校有 P_4^4 种方法，共有 $\frac{1}{2}C_6^2C_4^2P_4^4=1080$ 种方法，ii 各组人数为 3，1，1，1，这时共有 $C_6^3P_4^4=480$ 种分法．总共有 1560 种分法．

13. **解**　(1)首先将 A，B、C 看作 1 人，与除 D 以外的 2 人排列，有 P_3^3 种；其次将 D 插入，有 P_2^1 种插法；而 A，B，C 三人又有 P_3^3 种排法，共有 $2P_3^3\cdot P_3^3=72$ 种排法．(2)排法可分为两类(i)C 站两端，有 2 种站法；从除 A，B，C 以外 3 人中任选一个紧挨 C 排在一起，有 P_3^1 种排法，共有 $P_2^1\cdot P_3^1\cdot P_4^4=144$ 种排法；(ii)C 站除两端以外位置，有 P_4^1 种排法，从除 A，B，C 外三人中任选两人分别站在 C 之左右，有 P_3^2 种站法，共有 $P_4^1P_3^2P_3^3=144$ 种排法，总共有 288 种排法．

14. **解**　除甲、乙、A、B、C 外其余三人先站成一排有 P_3^3 种不同排法，再安排甲，乙，可分两类情形．

(i) 甲，乙不相邻，有 P_4^2 种不同的排法，最后安排 A、B、C，又有 P_6^3 种不同

的排法,根据乘法原理,共有不同排法 $P_3^3P_4^2P_6^3$ 种.

(ii) 甲,乙相邻,有 $P_4^1P_2^2$ 种不同排法,最后先安排 A,B,C 中之一人站在甲,乙中间,再安排 A,B,C 中其余二人(不能相邻),有 $C_3^1P_5^2$ 种不同的排法根据乘法原理共有不同排法 $P_3^3P_4P_2^2C_3^1P_5^2$ 种.

根据加法原理,共有不同排法

$$P_3^3P_4^2P_6^3+P_3^3P_4^1P_2^2C_3^1P_5^2=11520(\text{种}).$$

15. **解** 依题设,四棱锥 $S-ABCD$ 的顶点 S,A,B 所染颜色互不相同,它们共有 $P_5^3=60$ 种染色方法.

当 S,A,B 已染好时,不妨设其颜色分别为 1,2,3. 若 C 染颜色 2,则 D 可染色 3,4,5 之一,3 有 3 种染法;若 C 染颜色 4,则 D 可染颜色 3 或 5,有 2 种染法;若 C 染颜色 5,则 D 可染颜色 3 或 4,也有 2 种染法,可见,当 S,A,B 已染好时,C 与 D 还有 7 种染法,从而总的染色方法数为 $60\times7=420$.

16. **解** 把 n^2 个不同实数排成 $n\times n$ 方阵有 $P_{n^2}^{n^2}$ 种方式.

对于一个 $n\times n$ 方阵,在每一列中取出最大数,每一行取出最小数至多有 $2n$ 个不同数.若要恰有 $2n$ 个,关键在于同一个数只能被取出一次.显然一个数最多被取两次,即所在列和所在行同时取了它,事实上被取两次的数也可能存在于方阵中,如图所示

3	2
-1	1

数 2 既是所在列中最大数 α 是所在行中最小数.不难发现这样的数至多一个.假若有第 i 行第 j 列的数 a_{ij} 与第 k 行第 l 列 a_{kl} $(i\neq k,j\neq l)$ 都被取用了两次,那么 $a_{ij}>a_{kj}>a_{kl}$, $a_{ij}>a_{il}>a_{kl}$ 同时成立,这不可能,不妨称恰取出 $2n-1$ 个数的排列为"坏排列",作"坏排列"的方式可分成四步进行.先从 n^2 个数中任取 $2n-1$ 个数,有 $C_{n^2}^{2n-1}$ 种不同方式,将这 $2n-1$ 个数依大小排列而居正中的数记为 A,让 A 放置于方阵的某一位置有 $P_{n^2}^1$ 种方式,第三步把比 A 小的 $(n-1)$ 个数排在 A 所在列,把比 A 大的 $(n-1)$ 个数排在 A 所在行,又有 $P_{n-1}^{n-1}\cdot P_{n-1}^{n-1}$ 种方式,最后把剩余的 n^2-2n+1 个数随意地放置在方阵其他位置上,有 $P_{n^2-2n+1}^{n^2-2n+1}$ 种方式.根据乘法原理,作"坏排列"的方式数是

$$\begin{aligned}&C_{n^2}^{2n-1}\cdot P_{n^2}^1\cdot(P_{n-1}^{n-1})^2\cdot P_{n^2-2n+1}^{n^2-2n+1}\\&=\frac{(n^2)!}{(2n-1)!(n^2-2n+1)!}n^2[(n-1)!]^2\cdot(n^2-2n+1)!\\&=\frac{(n^2)!(n!)^2}{(2n-1)!}.\end{aligned}$$

综上所述,符合要求的排列方式数为

$$P_{n^2}^{n^2}=(n^2)!-\frac{(n^2)!(n!)^2}{(2n-1)!}=(n^2)![1-\frac{(n!)^2}{(2n-1)!}].$$

17.**解** 记小于8号的队员站在8号之前,大于15号的队员站在15号队员之后的排队方法集合为 I,集合 I 中,1号队员站在首位的排队方法记为 A;集合 I 中,20号队员站在末位的排队方法记为 B,那么根据逐步淘汰原理,有

$$|\overline{A\cup B}|=|I|-(|A|+|B|)+|A\cap B|.$$

设想从20个位置中取8个位置安排1号到8号队员,有 C_{20}^{8}种取法,其中8号队员总位于末位,其余7名队员有 P_7^7 种排法,再从剩下12个位置中取6个位置有 C_{12}^{6}种取法,而第15号队员位于这6个位置中的首位,其他队员有 P_5^5 种站法,将最后6个位置随意安排9号到14号队员,

$$|I|=C_{20}^{8}\cdot P_7^7\cdot C_{12}^{6}\cdot P_5^5\cdot p_6^6=\frac{20!}{48}.$$

在集合 A 中,1号队员站在首位,其余类似上面所述排列,故可得

$$|A|=C_{19}^{7}\cdot P_6^6\cdot C_{12}^{6}\cdot P_5^5\cdot p_6^6=\frac{19!}{42}.$$

在集合 B 中,20号队员站到末位,其余也类似上面排列,故可得

$$|B|=C_{19}^{8}\cdot P_7^7\cdot C_{11}^{5}\cdot P_4^4\cdot p_6^6=\frac{19!}{40}.$$

如果1号在首位,20号在末位,同时小于8号的队员在8号队员之前,大于15号的队员在15号队员之后,那么类似于前面所述,其排队方法数

$$|A\cap B|=C_{18}^{7}\cdot P_6^5\cdot C_{11}^{5}\cdot P_4^4\cdot p_6^6=\frac{18!}{35}.$$

所以,满足要求的排队方法数是

$$|\overline{A\cup B}|=\frac{20}{48}-(\frac{19!}{42}+\frac{19!}{40})+\frac{18!}{35}$$

$$=\frac{393}{56}\cdot 18!$$

练习二十一

1.**证明** 依题设,由

$$u^2+uv+v^2=(u-v)^2+3uv$$

可被 9 整除,知 $3|(u-v)^2$,进而有 $3|u-v$,于是,$9|(u-v)^2$,又有 $3|uv$,从而 u 与 v 之一被 3 整除. 再由 $u-v$ 被 3 整除可知 u,v 都被 3 整除.

2. **解** 设七位数为 $N=\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$,且 $a_6\neq 0$,$a_i(i=0,1,\cdots,5)$均取 0 到 6 的任一数码. 令 $A=a_6+a_4+a_2+a_0$,$B=a_5+a_3+a_1$,则

$$A+B=21 \quad ①$$

能被 55 整除的七位数必定同时能被 11 和 5 整除,于是有 $|A-B|=11k$(k 为零或自然数). 由①得 $|A-B|<21$,$A-B\neq 0$,则 $k=1$,即

$$|A-B|=11 \quad ②$$

由①,②知,A,B 中一个是 16,另一个是 $\frac{21-1}{2}=5$. 又 0,1,2,3,4,5,6 中最小的四个数之和为 6,故 $A=16$,$B=5$,从而可知 B 的三个数字只能是 0,1,4 或 0,2,3 两种情形,即有 $B=0+1+4$,$A=2+3+5+6$,或 $B=0+2+3$,$A=1+4+5+6$.

由于 0 不在七位数的末位,则末位数必定是 5,即 $a_0=5$,所以最小的七位数是 1042635,最大的七位数是 6431205.

3. **证明** 由

$$a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)=ab(a+b)(a-b),$$
$$b^3b-cb^3=bc(b^2-c^2)=bc(b+c)(b-c),$$
$$c^3a-ac^3=ca(c^2-a^2)=ac(c+a)(c-a),$$

可知在 a,b,c 中至少有一个是偶数,或者没有偶数时,a^3b-ab^3,b^3c-bc^3,c^3a-ca^3 都能被 2 整除. 若 a、b、c 中有一是 5 的倍数,则命题成立. 否则,a^2,b^2、c^2 的个位数字为 1,4,6,9 之一,从 1,4,6,9 中任取三个数(包括重复),其差必有 0 或 ± 5,故 a^2-b^2,b^2-c^2,c^2-a^2 中至少有一个能被 5 整除. 因$(2,5)=1$,命题成立.

4. **证明** 设$(a,b)=d$,则 $d^2|ab$,$d^2|a^2+b^2$. 因

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+a+b^2+b}{ab}$$

是整数,故 $d^2|a+b$,所以 $d\leqslant\sqrt{a+b}$.

5. **证明** 记 $M=\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$,则

$$M=\frac{n(n^2-1)(n^2-4)}{5}+\frac{5n^3-4n}{5}+\frac{n(n^2-1)}{3}+\frac{n}{3}+\frac{7n}{15}$$
$$=n^3+\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)}{5}+\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

连续 5 个整数 $n-2$,$n-1$,n,$n+1$,$n+2$ 中必有一个数能被 5 整除,连续 3 个整

数 $n-1, n, n+1$ 中必有一个数能被3整除. 于是,对任意整数 n, M 总是整数.

6. **证明** 假设对某一自然数 m,数 1978^m-1 可被 1000^m-1 整除,即

$$1978^m - 1 = k(1000^m - 1),$$

于是,有
$$1978^m - 1000^m = (k-1)(1000^m - 1),$$
因
$$1978^m - 1000^m = 2^m(989^m - 500^m),$$
且 1000^m-1 是奇数,故 989^m-500^m 被 1000^m-1 整除. 但 $0 < 989^m - 500^m < 1000^m - 1$,矛盾! 命题获证.

7. **证明** 显见 m 不能被5整除. 设 $m=5k+r(k\in Z, 1\leqslant r\leqslant 4, r\in N)$. 当 r 等于1,2,3,4时,分别取 n 等于1,3,2,4. 这时 mn 被5除总是余1.

设
$$A = am^3 + bm^2 + cm + d, \quad ①$$
$$B = a + bn + cn^2 + dn^3, \quad ②$$
由①,②可得
$$An^3 - B = (mn-1)[a(m^2n + mn + 1) - bn(mn+1) + cn^2].$$
因为 $mn-1$ 能被5整除. 这样,由于 A 被5整除,所以 B 被5整除.

8. **解** 因500元子集 $\{2,4,6,\cdots,1000\}$ 中任两个元素不互素,所以 $k\leqslant 499$.

另外,$\{1,2,3,\cdots,1000\}$ 的任一501元子集中一定有两元素互素,事实上,把1,2,…,1000分成500组:(1,2),(3,4),…,(999,1000),所以从中任取501个的话,一定有两个是取自同一组的,同一组中两个数相邻,因而是互素的.

9. **解** (1)首先,$n\neq 3$. 否则,设 $\{r, r+1, r+2\}$ 具有题中所要求的性质:$(r+2)\mid r(r+1)$,因 $(r+1, r+2)=1$,故有 $(r+2)\mid r$,这不可能.

以下分两种情况进行讨论 $n\geqslant 4$ 时情形:

(i) 若 $n=2k$,因 $n-1$ 为奇数,故 n 个数的集合 $\{n-1, n, n+1, \cdots, 2(n-1)\}$ 即满足要求.

(ii) 若 $n=2k+1$,则 $n-2$ 为奇数,故 n 个数的集合 $\{n-3, n-2, n-1, \cdots, 2(n-2)\}$ 即满足要求.

(2)先证明:$n\geqslant 5$ 时,满足要求的 n 个相继自然数集合至少有两个.

(i) 当 n 为不小于6的偶数时,除了(1)中已给出的一个集合之外,集合 $\{n-5, n-4, \cdots, 2(n-3)\}$ 也满足要求.

(ii) 当 n 为不小于9的奇数时,除(1)中已给出一个集合之外,集合 $\{n-7, n-6, \cdots, 2(n-4)\}$ 也满足要求.

(iii) 当 $n\geqslant 5$ 时,$\{2,3,4,5,6\}$,$\{8,9,10,11,12\}$ 都满足要求;当 $n=7$ 时,$\{4,5,6,7,8,9,10\}$ $\{6,7,8,9,10,11,12\}$ 都满足要求.

最后我们证明：当 $n=4$ 时，只有惟一集合$\{3,4,5,6\}$满足要求.

设$\{k,k+1,k+2,k+3\}$满足要求，即 $k+3$ 整除 $k,k+1,k+2$ 的最小公倍数. 因为$(k+2,k+3)=1$. 所以又有 $k+3$ 整除 $k,k+1$ 的最小公倍数，又因$(k,k+1)=1$，所以$(k+3)\mid k(k+1)$.

若 $k+3$ 为奇数，则 $k+1$ 和 $k+3$ 是两个相继的奇数，故$(k+1,k+3)=1$，所以$(k+3)\mid k(k+1)$导致$(k+3)\mid k$，此不可能.

若 $k+3$ 为偶数，记 $k+3=2m$，于是有

$$2m\mid 2(m-1)(2m-3)$$

这意味着 $m\mid 2m-3$，从而 $m\mid 3$，由于 $m\neq 1$. 故只能是 $m=3$，这就证明了$\{3,4,5,6\}$是满足要求的惟一集合.

10. **解** (1)从能被 2^m-1 整除且形如 $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_n}$的数中选取使 n 最小的那些数，再从所得的数中选取使 $k_1+k_2+\cdots+k_n$ 为最小的数此时 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 彼此互不相同. 否则，若有两数相同不妨设为 $k_1=k_2$，则可用 2^{k_1+1}代替 2^{k_1} 与 2^{k_2}，与 n 的最小性矛盾. 又若这些数中有不小于 m 的，不妨设是 k_1，则可用 k_1-m 代替 k_1，使和变小，矛盾. 这是因为 $2^{k_1}-2^{k_1-m}=2^{k_1-m}(2^m-1)$，即 2^{k_1} 与 2^{k_1-m}除以 2^m-1 具有相同的余数. 因此，$k_i\leqslant m-1(i=1,2,\cdots,n)$. 如果 $n\leqslant m$，则 $2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_m}\leqslant 2^{m-1}+2^{m-2}+\cdots+2=2^m-2<2^{m-1}$，矛盾.

(2)不存在. 若不然，设 $P=a_1\cdot 10^r+\cdots+a_{r+1}$是能被 $M=\underbrace{11\cdots1}_{m个1}$ 整除时. 所有数字和小于 m 的最小自然数，则 $r\geqslant m$. 记 $P_1=P-(10^r-10^{r-m})$，那么 P_1 可被 m 整除且其数字和不超过 P 的数字和，矛盾. 故回答是否定的.

练习二十二

一、填空题

1. **解** $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=(3^n-2^n)(3^{n+1}+2^{n+1})$.

当 $n>1$ 时，$3^n-2^n>1$，$3^{n+1}-2^{n+1}>1$，故此时所给数为合数. 当 $n=1$ 时，所给数为 13 是素数.

2. **解** $21600=2^5\cdot 3^3\cdot 5^2$. 约数个数为

$$(5+1)(3+1)(2+1)=72;$$

所有约数和为

$$\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}=78120.$$

3. **解** 满足题设要求的正整数 $n=4$，是惟一的. 事实上，当 $n=1$ 时，$n+3$ 为合数；$n=2$ 时，$n+7$ 为合数；$n=3$ 时，$n+1$ 为合数. 当 $n>4$ 时，$n+1$，$n+2$，$n+7$，$n+9$，$n+13$，$n+15$，都大于 5，且 6 个数中至少有一个数被 5 整数、这是因为它们被 5 除后余数包含了 0,1,2,3,4 各种情形，其中必有一项被 5 整除，即为合数，当 $n=4$ 时，6 个数为 5,7,11,13,17,19 均为质数.

二、解答题

4. **证明** 假设素数的个数是有限个，仅有 $p_1,p_2,\cdots,p_k$，且 $2=p_1<p_2<\cdots<p_K$，又设 $p=p_1p_2\cdots p_k+1$，q 是 p 的因素，则 $q\neq p_i(i=1,2,\cdots k)$，否则，$q|1$ 与 q 是素数矛盾. 于是除 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 外还应有一个素数 q，矛盾. 故命题成立.

5. **证明** 设 $a=4k^4$，且 k 是大于 1 的自然数，于是有

$$\begin{aligned}z=n^4+a&=n^4+4k^4=(n^2+2k^2)^2-4n^2k^2\\&=(n^2+2k^2+2nk)(n^2+2k^2-2nk)\\&=[(n+k)^2+k^2][(n-k)^2+k^2]\qquad①\end{aligned}$$

显见，①中两括号中数大于 1，故 z 为合数.

6. **证明** 即为偶数又是素数的正整数只有一个，就是 2，因此，

（ⅰ） 若 a,b,c 都是奇数，则 $p=q=r=2$.

（ⅱ） 若 a,b,c 中有两个奇数，一个偶数时，不妨设 a,b 为奇，c 为偶，则 $q=2$、$a=b=1$，因此 $p=r=c+1$.

（ⅲ） 若 a,b,c 中至少有两个为偶数时，p,q,r 不可能全为素数.

7. **证明** 设 a,b,c 的质因数标准式为

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdots,p_k^{\alpha_k},$$

$$b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots\cdot p_k^{\beta_k},$$

$$c=p_1^{\gamma_1}\cdot p_2^{\gamma_2}\cdots\cdot p_k^{\gamma_k}.$$

于是命题等价于证明：

$$\begin{aligned}&2\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\alpha_i,\beta_i\}-\max\{\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\gamma_i,\alpha_i\}\\&=2\min\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\alpha_i,\beta_i\}-\min\{\beta_i,\gamma_i\}-\min\{\gamma_i,\alpha_i\},\end{aligned}$$

对 $i=1,2,\cdots,k$ 均成立.

不失一般性，对某个 i，设 $\alpha_i\leqslant\beta_i\leqslant\gamma_i$，那么

$$2\max\{\alpha_i,\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\alpha_i,\beta_i\}-\max\{\beta_i,\gamma_i\}-\max\{\alpha_i,\gamma_i\}$$

$= 2\gamma_i - \beta_i - 2\gamma_i = -\beta_i$

$2\min\{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i\} - \min\{\alpha_i, \beta_i\} - \min\{\beta_i, \gamma_i\} - \min\{\gamma_i, \alpha_i\}$

$= 2\alpha_i - \alpha_i - \beta_i - \alpha_i = -\beta_i$

8. **解** 设 n 满足题设要求. 若 $2\nmid n$, 则 $n \leqslant 2^2$, 否则取 $m = 4$, 即与 n 互素又小于 n, 4 成为素数, 矛盾. 因此 $n = 3$. 若 $2 \mid n$, 但 $3 \nmid n$, 则同理有 $n \leqslant 3^2$, 即 $n = 4, 8$. 若 $2 \mid n, 3 \mid n$, 但 $5 \nmid n$, 则 $n \leqslant 5^2$ 且 $6 \mid n$, 即 $n = 6, 12, 18, 24$. 若 $2 \mid n, 3 \mid n, 5 \mid n$, 但 $7 \nmid n$, 则 $n \leqslant 7^2$, 且 $30 \mid n$, 即 $n = 30$. 设对某个 $k \geqslant 4$, n 被 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 整除, 但不能被 p_{k+1}, 其中 $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k < p_{k+1}$ 是连续素数, 则 $n \leqslant p_{k+1}^2$, 且 $p_1 p_2 \cdots p_k \mid n$. 由 $p_1 p_2 \cdots p_k \leqslant n \leqslant 10^7$ 知 $k \leqslant 8$, 经验证, $k = 4, 5, 6, 7, 8$ 时 $p_1 p_2 \cdots p_k > p_{k+1}^2$ 与 $p_1 p_2 \cdots p_k \leqslant n \leqslant p_{k+1}^2$, 矛盾, 故 $k \leqslant 3$. 又集合 $\{3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30\}$ 中每个数均满足题设要求, 即为所求.

9. **证明** 设 $a = (n+1)!$, 我们证明下面 n 个相继自然数: $a^2 + 2, a^2 + 3, a^2 + 4, \cdots, a^2 + (n+1)$ 都不是素数的幂. 首先, $a^2 + k$ $(k = 2, \cdots, n+1)$ 不是素数, 这是因为 $k \mid a^2 + k$. 其次, 若 $a^2 + k = p^r$, 其中 p 是素数, $r \in \mathrm{N}$, 那么 $p \mid k$ (因为若 p 不整除 k, 那么 $a^2 + k$ 含有异于 p 的素因子, 矛盾), 另外, k 不能含有除 p 以外的素因子 (若 $q \neq p$ 是 k 的素因子, 那么 $q \mid a^2 + k$, 故 $q \mid p^r$, 矛盾), 故存在 $j \in \mathrm{N}$, 使得 $k = p^j$. 所以 $p^j \mid a^2 + k$. 但另一方面, $p^{j+1} \nmid k$, $p^{j+1} \mid a^2$. 这说明 $a^2 + k = p^j$ (因为 $p^{j+1} \nmid a^2 + k$). 于是必须有 $a^2 = 0$, 矛盾这表明 $a^2 + k = p^r$ 不能成立. 从而, $a^2 + k$, $k = 2, 3, \cdots, n+1$ 不是某个素数的幂.

10. **证明** 自 1 到 1986 的所有正整数中, 被 3^6 整除的只有两个: $729 = 3^6$、$1458 = 2 \cdot 3^6$, 而其他各数的标准分解式中, 3 的幂指数至多是 5, 所以当 $1 \leqslant m < n < 1986$ 时, 所有乘积 mn 中, 除 $729 \times 1458 = 2 \times 3^{12}$ 外, 含有因数 3 的方幂的最高指数是 11. 于是, 如果把所有形如 $\frac{1}{mn}$ 的数 (除 $\frac{1}{729 \times 1458}$ 外) 通分, 然后求和, 便得一个形如 $\frac{a}{3^{11} \cdot b}$ 的数, 其中 $a, b \in \mathrm{N}$, 且 b 不被 3 整除. 记题设中所有形如 $\frac{1}{mn}$ 的数的和为 S, 则

$$S - \frac{a}{3^{11} b} = \frac{1}{2 \cdot 3^{12}},$$

即
$$2 \cdot 3^{12} Sb - 6a = b.$$

若 S 为整数, 则上式左端可被 3 整除, 右端不能被 3 整除, 矛盾. 因此, S 不是整数.

11. **证明** 设 m 是使 k^2+k+n 为合数的最小正整数,若 $\sqrt{\frac{n}{3}}<m<n-2$,令 p 是 m^2+m+n 的最小素因子,则 $p\leqslant\sqrt{m^2+m+n}$.

(i)若 $m\geqslant p$,则 $p\mid(m-p)^2+(m-p)+n$. 又

$$(m-p)^2+(m-p)+n\geqslant n>p,$$

这与 m 是使 k^2+k+n 为合数的最小正整数矛盾.

(ii)若 $m\leqslant p-1$,则

$$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n=PM+m^2+m+n\quad(M\in\mathbf{N})$$

被 p 整除,且

$$(p-1-m)^2+(p-1-m)+n>n\geqslant p.$$

因为 $(p-1-m)^2+(p-1-m)+n$ 为合数,所以 $p-1-m\geqslant m$, $p\geqslant 2m+1$,由 $2m+1\leqslant p\leqslant\sqrt{m^2+m+n}$ 可得

$$4m^2+4m+1\leqslant m^2+m+n,$$

即

$$3m^2+3m+1-n\leqslant 0,$$

$$m\leqslant\frac{-3+\sqrt{2n-3}}{6}<\sqrt{\frac{n}{3}},$$

与题设矛盾,

综上所述,命题得证.

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□
□□=
□□=362
SS□=0
□□□□=
Vss□=60069956

f x =ax2+bx+c

[x] {x}